1.27

|x+1| = 3

$\Updownarrow$

x + 1 = 3 $\bigvee$ x + 1 = -3

$\Updownarrow$

x = 2 $\bigvee$ x = -4

Czyli równanie ma dwa rozwiązania: x_1=-4 oraz x_2=2.

1.28

$|x+1| = |x-1|$ (1)

Zbadajmy znaki wyrażeń pod modułami:

x+1 $\geqslant$ 0	x-1 $\geqslant$ 0
x $\geqslant$ -1	x $\geqslant$ 1
x+1 < 0	x-1 < 0
x < -1	x < 1

$\longrightarrow$

$-\infty$ -1 0 1 ∞

Dla x$\in$($-\infty$;-1) mamy:

$|x+1|$ = -x - 1
oraz
$|x-1|$ = -x + 1

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
-x - 1 = -x + 1 /+x
-1 = 1
Równanie to jest sprzeczne a więc w rozważanym przedziale nie ma rozwiązania.

Dla x$\in$<-1;1) mamy:

$|x+1|$ = x + 1
oraz
$|x-1|$ = -x + 1

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
x + 1 = -x + 1
2x = 0
x = 0
Ponieważ x=0 należy do rozważanego przedziału więc jest rozwiązaniem.

Dla x$\in$<1;∞) mamy:

$|x+1|$ = x + 1
oraz
$|x-1|$ = x - 1

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
x + 1 = x - 1
1 = -1
Równanie to jest sprzeczne a więc w rozważanym przedziale nie ma rozwiązania.

Podsumowując, równanie (1) ma jedno rozwiązanie x=0;

1.29

$|x+1| + 2|x-1| = 5$ (1)

Zbadajmy znaki wyrażeń pod modułami:

x+1 $\geqslant$ 0	x-1 $\geqslant$ 0
x $\geqslant$ -1	x $\geqslant$ 1
x+1 < 0	x-1 < 0
x < -1	x < 1

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$-\infty$ -1 0 1 ∞

Dla x$\in$($-\infty$;-1) mamy:

$|x+1|$ = -x - 1
oraz
$|x-1|$ = -x + 1

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
-x - 1 + 2(-x + 1) = 5
-x - 1 - 2x + 2 = 5
-3x + 1 = 5
-3x = 4 /:(-3)
x = -$\frac{4}{3}$
Ponieważ x = -$\frac{4}{3}$ $\in$($-\infty$;-1), więc mamy tu rozwiązanie równania (1).

Dla x$\in$<-1;1) mamy:

$|x+1|$ = x + 1
oraz
$|x-1|$ = -x + 1

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
x + 1 + 2(-x + 1) = 5
x + 1 - 2x + 2 = 5
-x + 3 = 5
-x = 2
x = -2
Ponieważ x=-2 nie należy do rozważanego przedziału, więc nie jest rozwiązaniem.

Dla x$\in$<1;∞) mamy:

$|x+1|$ = x + 1
oraz
$|x-1|$ = x - 1

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
x + 1 + 2(x - 1) = 5
x + 1 + 2x - 2 = 5
3x - 1 = 5
3x = 6
x = 2
Ponieważ x = 2 $\in$<1;∞), więc mamy tu rozwiązanie równania (1).

Podsumowując, równanie (1) ma dwa rozwiązania $x_1 = -\frac{4}{3}$ oraz $x_2 = 2$;

1.30

$|1-2x| + |2x-6| = x \qquad (1)$

Ponieważ po lewej stronie mamy sumę modułów, a więc liczbę nieujemną, zatem musi być spełniony warunek:
$x \geqslant 0 \qquad (2)$

Zbadajmy teraz znaki wyrażeń pod modułami:

$1-2x \geqslant 0$	$2x-6 \geqslant 0$
$2x \leqslant 1$	$2x \geqslant 6$
$x \leqslant \frac{1}{2}$	$x \geqslant 3$

$1-2x < 0$	$2x-6 < 0$
$2x > 1$	$2x < 6$
$x > \frac{1}{2}$	$x < 3$

$\longrightarrow$

$-\infty \qquad 0 \quad \frac{1}{2} \qquad 3 \quad \infty$

Rozważmy teraz przedziały o końcach, w których wyrażenia pod modułami zmieniają znaki uwzględniając przy tym warunek (2).

Dla $x \in \langle 0; \frac{1}{2} \rangle$ mamy:

$|1-2x| = 1 - 2x$
oraz
$|2x-6| = -2x + 6$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
$1 - 2x + (-2x + 6) = x$
$1 - 2x - 2x + 6 = x$
$-4x + 7 = x$
$7 = 5x$
$x = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$
Ponieważ $x = 1\frac{2}{5}$ nie należy do rozważanego przedziału, więc nie mamy w nim rozwiązania.

Dla $x \in (\frac{1}{2}; 3)$ mamy:

$|1-2x| = -1 + 2x$
oraz
$|2x-6| = -2x + 6$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
$-1 + 2x - 2x + 6 = x$
$5 = x$
$x = 5$
Ponieważ $x=5$ nie należy do rozważanego przedziału, więc również nie jest rozwiązaniem.

Dla $x \in \langle 3; \infty)$ mamy:

$|1-2x| = -1 + 2x$
oraz
$|2x-6| = 2x - 6$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
$-1 + 2x + 2x - 6 = x$
$4x - 7 = x$
$3x = 7$

$x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$
Ponieważ $x = 2\frac{1}{3} \notin <3;\infty)$, więc nie mamy tu rozwiązania równania (1).

Ostatecznie równanie (1) nie posiada żadnego rozwiązania, czyli jest sprzeczne.

1.31

$|4-2x| + |-x+3| = 5 \qquad (1)$

Zbadajmy znaki wyrażeń pod modułami:

$4 - 2x \geqslant 0$	$-x + 3 \geqslant 0$
$2x \leqslant 4$	$x \leqslant 3$
$x \leqslant 2$	

$4 - 2x < 0$	$-x + 3 < 0$
$2x > 4$	$x > 3$
$x > 2$	

$\longrightarrow$

$-\infty \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad \infty$

Dla $x \in (-\infty;2>$ mamy:

$|4-2x| = 4 - 2x$
oraz
$|-x+3| = -x + 3$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
$4 - 2x - x + 3 = 5$
$-3x + 7 = 5$
$-3x = -2$
$x = \frac{2}{3}$
Ponieważ $x = \frac{2}{3} \in (-\infty;2>$, więc mamy tu rozwiązanie równania (1).

Dla $x \in (2;3>$ mamy:

$|4-2x| = -4 + 2x$
oraz
$|-x+3| = -x + 3$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
$-4 + 2x - x + 3 = 5$
$x - 1 = 5$
$x = 6$
Wartość ta nie należy do rozważanego przedziału, więc nie jest rozwiązaniem.

Dla $x \in (3;\infty)$ mamy:

$|4-2x| = -4 + 2x$
oraz
$|-x+3| = x - 3$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:
$-4 + 2x + x - 3 = 5$
$3x - 7 = 5$
$3x = 12$
$x = 4$

Ponieważ $x = 4 \in (3;\infty)$, więc jest rozwiązaniem równania (1).

Ostatecznie równanie (1) ma dwa rozwiązania $x_1=\frac{2}{3}$ oraz $x_2=4$;

1.32

$\left|x^2 - 7x + 8\right| = 2$ (1)

$\Updownarrow$

$x^2 - 7x + 8 = 2 \quad \vee \quad x^2 - 7x + 8 = -2$

$x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 7x + 10 = 0$

Rozważmy równanie $x^2 - 7x + 6 = 0$ (2)

$\triangle=b^2-4ac = (-7)^2-4\cdot1\cdot6 = 49 - 24 = 25$

$\Downarrow \ \triangle > 0$

Trójmian kwadratowy (2) ma dwa miejsca zerowe:

$x_1= \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-7)-\sqrt{25}}{2\cdot1} = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x_2= \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2\cdot1} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Rozważmy teraz równanie $x^2 - 7x + 10 = 0$ (3)

$\triangle=b^2-4ac = (-7)^2-4\cdot1\cdot10 = 49 - 40 = 9$

$\Downarrow \ \triangle > 0$

Trójmian kwadratowy (3) ma dwa miejsca zerowe:

$x_1= \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2\cdot1} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2= \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2\cdot1} = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Ostatecznie równanie (1) ma cztery rozwiązania:

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$