

1.27

$$|x+1| = 3$$

\Downarrow

$$x + 1 = 3 \quad \vee \quad x + 1 = -3$$

\Downarrow

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -4$$

Czyli równanie ma dwa rozwiązania: $x_1=-4$ oraz $x_2=2$.

1.28

$$|x + 1| = |x - 1| \quad (1)$$

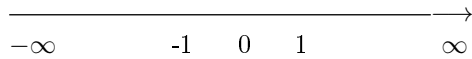
Zbadajmy znaki wyrażeń pod modułami:

$$x+1 \geq 0 \quad x-1 \geq 0$$

$$x \geq -1 \quad x \geq 1$$

$$x+1 < 0 \quad x-1 < 0$$

$$x < -1 \quad x < 1$$



Dla $x \in (-\infty; -1)$ mamy:

$$|x + 1| = -x - 1$$

oraz

$$|x - 1| = -x + 1$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$-x - 1 = -x + 1 \quad /+x$$

$$-1 = 1$$

Równanie to jest sprzeczne a więc w rozważanym przedziale nie ma rozwiązania.

Dla $x \in [-1; 1)$ mamy:

$$|x + 1| = x + 1$$

oraz

$$|x - 1| = -x + 1$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$x + 1 = -x + 1$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Ponieważ $x=0$ należy do rozważanego przedziału więc jest rozwiązaniem.

Dla $x \in [1; \infty)$ mamy:

$$|x + 1| = x + 1$$

oraz

$$|x - 1| = x - 1$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$x + 1 = x - 1$$

$$1 = -1$$

Równanie to jest sprzeczne a więc w rozważanym przedziale nie ma rozwiązania.

Podsumowując, równanie (1) ma jedno rozwiązanie $x=0$;

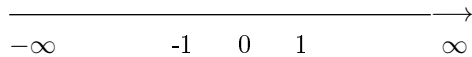
1.29

$$|x + 1| + 2|x - 1| = 5 \quad (1)$$

Zbadajmy znaki wyrażeń pod modułami:

$$\begin{array}{ll} x+1 \geq 0 & x-1 \geq 0 \\ x \geq -1 & x \geq 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x+1 < 0 & x-1 < 0 \\ x < -1 & x < 1 \end{array}$$



Dla $x \in (-\infty; -1)$ mamy:

$$|x + 1| = -x - 1$$

oraz

$$|x - 1| = -x + 1$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$-x - 1 + 2(-x + 1) = 5$$

$$-x - 1 - 2x + 2 = 5$$

$$-3x + 1 = 5$$

$$-3x = 4 \quad /:(-3)$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Ponieważ $x = -\frac{4}{3} \in (-\infty; -1)$, więc mamy tu rozwiązanie równania (1).

Dla $x \in [-1; 1)$ mamy:

$$|x + 1| = x + 1$$

oraz

$$|x - 1| = -x + 1$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$x + 1 + 2(-x + 1) = 5$$

$$x + 1 - 2x + 2 = 5$$

$$-x + 3 = 5$$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

Ponieważ $x = -2$ nie należy do rozważanego przedziału, więc nie jest rozwiązaniem.

Dla $x \in [1; \infty)$ mamy:

$$|x + 1| = x + 1$$

oraz

$$|x - 1| = x - 1$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$x + 1 + 2(x - 1) = 5$$

$$x + 1 + 2x - 2 = 5$$

$$3x - 1 = 5$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Ponieważ $x = 2 \in [1; \infty)$, więc mamy tu rozwiązanie równania (1).

Podsumowując, równanie (1) ma dwa rozwiązania $x_1 = -\frac{4}{3}$ oraz $x_2 = 2$;

1.30

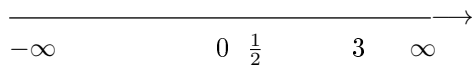
$$|1 - 2x| + |2x - 6| = x \quad (1)$$

Ponieważ po lewej stronie mamy sumę modułów, a więc liczbę nieujemną, zatem musi być spełniony warunek:
 $x \geq 0$ (2)

Zbadajmy teraz znaki wyrażeń pod modułami:

$$\begin{array}{ll} 1-2x \geq 0 & 2x-6 \geq 0 \\ 2x \leq 1 & 2x \geq 6 \\ x \leq \frac{1}{2} & x \geq 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1-2x < 0 & 2x-6 < 0 \\ 2x > 1 & 2x < 6 \\ x > \frac{1}{2} & x < 3 \end{array}$$



Rozważmy teraz przedziały o końcach, w których wyrażenia pod modułami zmieniają znaki uwzględniając przy tym warunek (2).

Dla $x \in \langle 0; \frac{1}{2} \rangle$ mamy:

$$\begin{array}{l} |1 - 2x| = 1 - 2x \\ \text{oraz} \\ |2x - 6| = -2x + 6 \end{array}$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$\begin{array}{l} 1 - 2x + (-2x + 6) = x \\ 1 - 2x - 2x + 6 = x \\ -4x + 7 = x \\ 7 = 5x \\ x = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} \end{array}$$

Ponieważ $x = 1\frac{2}{5}$ nie należy do rozważanego przedziału, więc nie mamy w nim rozwiązania.

Dla $x \in (\frac{1}{2}; 3)$ mamy:

$$\begin{array}{l} |1 - 2x| = -1 + 2x \\ \text{oraz} \\ |2x - 6| = -2x + 6 \end{array}$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$\begin{array}{l} -1 + 2x - 2x + 6 = x \\ 5 = x \\ x = 5 \end{array}$$

Ponieważ $x = 5$ nie należy do rozważanego przedziału, więc również nie jest rozwiązaniem.

Dla $x \in \langle 3; \infty \rangle$ mamy:

$$\begin{array}{l} |1 - 2x| = -1 + 2x \\ \text{oraz} \\ |2x - 6| = 2x - 6 \end{array}$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$\begin{array}{l} -1 + 2x + 2x - 6 = x \\ 4x - 7 = x \\ 3x = 7 \end{array}$$

$$x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

Ponieważ $x = 2\frac{1}{3} \notin \langle 3; \infty \rangle$, więc nie mamy tu rozwiązania równania (1).

Ostatecznie równanie (1) nie posiada żadnego rozwiązania, czyli jest sprzeczne.

1.31

$$|4 - 2x| + |-x + 3| = 5 \quad (1)$$

Zbadajmy znaki wyrażeń pod modułami:

$$4 - 2x \geq 0 \quad -x + 3 \geq 0$$

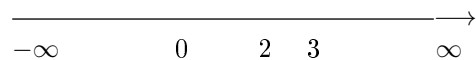
$$2x \leq 4 \quad x \leq 3$$

$$x \leq 2$$

$$4 - 2x < 0 \quad -x + 3 < 0$$

$$2x > 4 \quad x > 3$$

$$x > 2$$



Dla $x \in (-\infty; 2 >$ mamy:

$$|4 - 2x| = 4 - 2x$$

oraz

$$|-x + 3| = -x + 3$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$4 - 2x - x + 3 = 5$$

$$-3x + 7 = 5$$

$$-3x = -2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Ponieważ $x = \frac{2}{3} \in (-\infty; 2 >$, więc mamy tu rozwiązanie równania (1).

Dla $x \in (2; 3 >$ mamy:

$$|4 - 2x| = -4 + 2x$$

oraz

$$|-x + 3| = -x + 3$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$-4 + 2x - x + 3 = 5$$

$$x - 1 = 5$$

$$x = 6$$

Wartość ta nie należy do rozważanego przedziału, więc nie jest rozwiązaniem.

Dla $x \in (3; \infty)$ mamy:

$$|4 - 2x| = -4 + 2x$$

oraz

$$|-x + 3| = x - 3$$

Czyli równanie (1) przyjmuje postać:

$$-4 + 2x + x - 3 = 5$$

$$3x - 7 = 5$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

Ponieważ $x = 4 \in (3; \infty)$, więc jest rozwiązaniem równania (1).

Ostatecznie równanie (1) ma dwa rozwiązania $x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = 4$;

1.32

$$|x^2 - 7x + 8| = 2 \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} \updownarrow \\ x^2 - 7x + 8 = 2 \quad \vee \quad x^2 - 7x + 8 = -2 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \end{array}$$

Rozważmy równanie $x^2 - 7x + 6 = 0$ (2)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

$$\downarrow \Delta > 0$$

Trójmian kwadratowy (2) ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Rozważmy teraz równanie $x^2 - 7x + 10 = 0$ (3)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\downarrow \Delta > 0$$

Trójmian kwadratowy (3) ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ostatecznie równanie (1) ma cztery rozwiązania:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 5, x_4 = 6$$