1.59

$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (1)

Sprawdźmy wzór dla n=1:

$L = 1$

$P = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Czyli L = P a więc wzór (1) dla n=1 jest prawdziwy.

Sprawdźmy wzór dla n=2:

$L = 1 + 2 = 3$

$P = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Czyli L = P a więc wzór (1) dla n=2 jest prawdziwy.

Zakładamy teraz, że prawdziwe jest założenie indukcyjne dla $k \geq 1$ i $k \in N$:

$1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (2)

a twierdzimy, że spełniona jest teza indukcyjna:

$1 + 2 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

$\Updownarrow$

$1 + 2 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (3)

Lewe strony nierówności (2) i (3) różnią się o k+1. Zbadajmy o ile różnią się ich prawe strony:

$\frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2+2k+k+2-k^2-k}{2} = \frac{2k+2}{2} = \frac{2(k+1)}{2} = k + 1$

czyli prawe strony różnią się o tyle samo. Udowodniliśmy zatem, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna. Czyli wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n \geq 1$ i $n \in N$.

1.60

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (1)

Sprawdźmy wzór dla n=1:

$L = a_1$

$P = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1 \cdot 1 = a_1$

Czyli L = P a więc wzór (1) dla n=1 jest prawdziwy.

Sprawdźmy wzór dla n=2:

$L = a_2 =$ (z definicji ciągu geometrycznego) $a_{2-1} \cdot q = a_1 \cdot q$

$P = a_1 \cdot q^{2-1} = a_1 \cdot q^1 = a_1 \cdot q$

Czyli L = P a więc wzór (1) dla n=2 jest prawdziwy.

Zakładamy teraz, że prawdziwe jest założenie indukcyjne dla $k \geq 1$ i $k \in N$:

$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ (2)

a twierdzimy, że prawdziwa jest teza indukcyjna:

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{(k+1)-1} = a_1 \cdot q^k$ (3)

Pomnóżmy obie strony wzoru (2) przez q:

$a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q$

$\Updownarrow$ z definicji ciągu geometrycznego

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q$

$\Updownarrow$z wzoru rekurencyjnego potęgi

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{(k-1)+1}$

$\Updownarrow$

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$

Udowodniliśmy zatem, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna. Czyli wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n \geq 1$ i $n \in N$.

1.61

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}, \quad q \neq 1$ (1)

Sprawdźmy wzór (1) dla n = 1:

$L = S_1 = a_1$

$P = a_1 \cdot \frac{q^1 - 1}{q-1} = a_1 \cdot 1 = a_1$

Czyli wzór (1) jest prawdziwy.

Sprawdźmy wzór (1) dla n = 2:

$L = S_2 = a_1 + a_1 \cdot q$

$P = a_1 \cdot \frac{q^2 - 1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{(q-1)(q+1)}{q-1} = a_1 \cdot (q+1) = a_1 + a_1 \cdot q$

Czyli wzór (1) jest prawdziwy.

Zakładamy teraz, że prawdziwe jest założenie indukcyjne dla k$\geq$1 i k$\in$N:

$S_k = a_1 \cdot \frac{q^k-1}{q-1}, \quad q \neq 1 \qquad (2)$

a twierdzimy, że prawdziwa jest teza indukcyjna:

$S_{k+1} = a_1 \cdot \frac{q^{k+1}-1}{q-1}, \quad q \neq 1 \qquad (3).$

Mamy $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$ = (z wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego) $S_k + a_1 \cdot q^k$ = (z założenia indukcyjnego) $a_1 \cdot \frac{q^k-1}{q-1} + a_1 \cdot q^k = a_1(\frac{q^k-1}{q-1} + q^k) = a_1(\frac{q^k-1+q^k(q-1)}{q-1}) = a_1(\frac{q^k-1+q^{k+1}-q^k)}{q-1}) =$ $a_1(\frac{q^{k+1}-1)}{q-1})$, czyli wzór (3) jest prawdziwy.

Zatem udowowdniliśmy, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna. Czyli wzór (1) jest prawdziwy dla każdego n$\geq$1 i n$\in$N.

1.62

$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

Udowodnijmy najpierw wzór:

$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 \qquad (1)$

Sprawdźmy wzór (1) dla n = 1:

$L = 1^3 = 1$

$P = (1)^2 = 1$, a więc L = P.

Sprawdźmy wzór (1) dla n = 2:

$L = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$

$P = (1 + 2)^2 = 3^2 = 9$, a więc L = P.

Zakładamy teraz, że prawdziwe jest założenie indukcyjne dla k$\geq$1 i k$\in$N:

$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = (1 + 2 + ... + k)^2$

a twierdzimy, że prawdziwa jest teza indukcyjna:

$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + ... + k + (k+1))^2$

Lewe strony powyższych dwóch równań różnią się $(k + 1)^3$. Zbadajmy o ile różnią się ich prawe strony:

$(1 + 2 + ... + k + (k+1))^2 - (1 + 2 + ... + k)^2 = \{$na podstawie wzoru: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\}$

$[(1 + 2 + ... + k + (k + 1)) - (1 + 2 + ... + k)][(1 + 2 + ... + k + (k + 1)) + (1 + 2 + ... + k)] =$

$(k + 1)[2(1 + 2 + ... + k) + (k + 1)] = \{$na podstawie wzoru: $(1 + 2 + ... + n) = \frac{n(n+1)}{2}\}$

$(k + 1)[2\frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)] = (k + 1)[k(k + 1) + (k + 1)] = (k + 1)[(k + 1)(k + 1)] = (k + 1)^3$,

czyli prawe strony różnią się o tyle samo.

Zatem udowodniliśmy, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna. Czyli wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n \geq 1$ i $n \in N$.

Udowodnijmy teraz wzór:

$(1 + 2 + ... + n)^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ (2)

Ponieważ dla $n \in N$ i $n \geq 1$ mamy:

$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ {co zostało udowodnione w zadaniu 1.59}, więc podnosząc obie strony do kwadratu otrzymujemy wzór (2). Czyli on również jest prawdziwy dla $n \in N$ i $n \geq 1$.

Tym samym udowodniliśmy prawdziwość obu wzorów danych w zadaniu.

1.63

$(1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ dla $a \geq 0$ (1)

Sprawdźmy wzór (1) dla n=1:

$L = (1 + a)^1 = 1 + a$

$P = 1 + 1 \cdot a + \frac{1 \cdot (1-1)}{2}a^2 = 1 + a + 0 \cdot a^2 = 1 + a$

czyli L = P a tym samym L $\geq$P.

Sprawdźmy wzór (1) dla n=2:

$L = (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$

$P = 1 + 2a + \frac{2 \cdot (2-1)}{2}a^2 = 1 + 2a + \frac{2 \cdot 1}{2}a^2 = 1 + 2a + a^2$

czyli L = P a tym samym L $\geq$P.

Sprawdźmy wzór (1) dla n=3:

$L = (1 + a)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot a + 3 \cdot 1 \cdot a^2 + a^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$

$P = 1 + 3a + \frac{3 \cdot (3-1)}{2}a^2 = 1 + 3a + 3a^2$

czyli dla a $\geq$ 0 L $\geq$ P, bo L - P = $a^3 \geq 0$.

Zakładamy teraz, że prawdziwe jest założenie indukcyjne dla k$\geq$1 i k$\in$N:

$(1 + a)^k \geq 1 + ka + \frac{k(k-1)}{2}a^2$ dla a$\geq$0 (2)

a twierdzimy, że prawdziwa jest teza indukcyjna:

$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a + \frac{(k+1)(k+1-1)}{2}a^2 = 1 + (k + 1)a + \frac{(k+1)k}{2}a^2$ dla a$\geq$0

Pomnóżmy teraz obie strony nierówności (2) przez (1 + a):

$(1 + a)^k \cdot (1 + a) \geq (1 + ka + \frac{k(k-1)}{2}a^2)(1 + a)$ dla a$\geq$0

$(1 + a)^{k+1} \geq (1 + ka + \frac{k(k-1)}{2}a^2)(1 + a)$

$L = (1 + a)^{k+1} \geq 1 + a + ka + ka^2 + \frac{k(k-1)}{2}a^2 + \frac{k(k-1)}{2}a^3 = 1 + (k + 1)a + (k + \frac{k(k-1)}{2})a^2 + \frac{k(k-1)}{2}a^3 = 1 + (k + 1)a + \frac{2k+k(k-1)}{2}a^2 + \frac{k(k-1)}{2}a^3 = 1 + (k + 1)a + k\cdot\frac{2+k-1}{2}a^2 + \frac{k(k-1)}{2}a^3 = 1 + (k + 1)a + k\cdot\frac{k+1}{2}a^2 + \frac{k(k-1)}{2}a^3 = 1 + (k + 1)a + \frac{k(k+1)}{2}a^2 + \frac{k(k-1)}{2}a^3 \geq$ (dla a $\geq$ 0) $1 + (k + 1)a + \frac{(k+1)k}{2}a^2$

a zatem teza indukcyjna jest prawdziwa. Udowodniliśmy tym samym, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna. Czyli wzór (1) jest prawdziwy dla każdego n$\in$N i n$\geq$1.

1.64

$\cos\alpha + \cos 2\alpha + ... + \cos n\alpha = \frac{1}{2}[\frac{sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha} - 1]$ (1)

Sprawdźmy wzór (1) dla n = 1:

L = $\cos\alpha$

$P = \frac{1}{2}[\frac{sin(1+\frac{1}{2})\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha} - 1] = \frac{1}{2}\frac{sin(\alpha+\frac{1}{2}\alpha)-sin\frac{1}{2}\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2}\frac{sin(\alpha+\frac{1}{2}\alpha)-sin(\alpha-\frac{1}{2}\alpha)}{sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2}\frac{2cos\alpha\cdot sin\frac{1}{2}\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha} = \cos\alpha$

czyli L = P.

Sprawdźmy wzór (1) dla n = 2:

L = $\cos\alpha + \cos 2\alpha$

$P = \frac{1}{2}[\frac{sin(2+\frac{1}{2})\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha} - 1] = \frac{1}{2}\frac{sin\frac{5}{2}\alpha-sin\frac{1}{2}\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2}\frac{2sin(\frac{\frac{5}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha}{2})\cdot cos(\frac{\frac{5}{2}\alpha+\frac{1}{2}\alpha}{2})}{sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2\cdot sin\frac{1}{2}\alpha\cdot cos\frac{1}{2}\alpha\cdot cos\frac{3}{2}\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha} = 2\cdot\cos\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{3}{2}\alpha = \cos(\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha) + \cos(\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha) = \cos\alpha + \cos 2\alpha$

czyli L = P.

Zakładamy teraz, że prawdziwe jest założenie indukcyjne dla k≥1 i k∈N:

$\cos\alpha + \cos 2\alpha + ... + \cos k\alpha = \frac{1}{2}[\frac{sin(k+\frac{1}{2})\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha}$ - 1] (2)

a twierdzimy, że prawdziwa jest teza indukcyjna:

$\cos\alpha + \cos 2\alpha + ... + \cos k\alpha + \cos(k+1)\alpha = \frac{1}{2}[\frac{sin((k+1)+\frac{1}{2})\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha}$ - 1]

Lewe strony powyższych równań różnią się o:

$\cos(k+1)\alpha$

Zbadajmy o ile różnią się ich prawe strony:

$\frac{1}{2}[\frac{sin((k+1)+\frac{1}{2})\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha}$ - 1] - $\frac{1}{2}[\frac{sin(k+\frac{1}{2})\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha}$ - 1] $= \frac{1}{2}\frac{sin(k+\frac{3}{2})\alpha - sin\frac{1}{2}\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha}$ - $\frac{1}{2}\frac{sin(k+\frac{1}{2})\alpha - sin\frac{1}{2}\alpha}{sin\frac{1}{2}\alpha} =$

$\frac{sin(k+\frac{3}{2})\alpha - sin(k+\frac{1}{2})\alpha}{2sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2sin(\frac{(k+\frac{3}{2})\alpha-(k+\frac{1}{2})\alpha}{2})\cdot cos(\frac{(k+\frac{3}{2})\alpha+(k+\frac{1}{2})\alpha}{2})}{2sin\frac{1}{2}\alpha} =$

$\frac{sin(\frac{1}{2}\cdot(k\alpha+\frac{3}{2}\alpha-k\alpha-\frac{1}{2}\alpha))\cdot cos(\frac{1}{2}\cdot(k\alpha+\frac{3}{2}\alpha+k\alpha+\frac{1}{2}\alpha))}{sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{sin\frac{1}{2}\alpha\cdot cos\frac{1}{2}\cdot(2k\alpha+2\alpha)}{sin\frac{1}{2}\alpha} = cos(\frac{1}{2}\cdot 2(k\alpha+\alpha)) =$

$\cos(k+1)\alpha$

czyli prawe strony różnią się o tyle samo.

Zatem udowodniliśmy, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna.

Czyli wzór (1) jest prawdziwy dla każdego n∈N i n≥1.