1.65

$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=\binom{8}{4}$

W dowodzie korzystamy z wzoru $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$

P $=\binom{8}{4}=\binom{7}{4}+\binom{7}{3}=\binom{6}{4}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=\binom{5}{4}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=\binom{4}{4}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}$

Teraz korzystamy z tego, że $\binom{4}{4}=\binom{3}{3}$ i otrzymujemy:

$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=L$

c.n.d.

1.66

$(2a+b^2)^8$

Do powyższego wzoru podstawiamy:

$p=2a,\ q=b^2$ (1)

$(p+q)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}p^{8-k}q^k$

Zatem siódmy wyraz powyższego wzoru jest dla k = 6 i a postać:

$\binom{8}{6}p^{8-6}q^6=\binom{8}{6}p^2q^6=\frac{8!}{6!(8-6)!}p^2q^6=\frac{8!}{6!2!}p^2q^6=\frac{6!\cdot7\cdot8}{6!2!}p^2q^6=\frac{7\cdot8}{2}p^2q^6=7\cdot4p^2q^6=28p^2q^6$

Korzystamy teraz z wzorów podstawień (1):

$28p^2q^6=28\cdot(2a)^2\cdot(b^2)^6=28\cdot4a^2b^{12}=112a^2b^{12}$

Odp. Siódmy wyraz rozwinięcia $(2a+b^2)^8$ jest równy $112a^2b^{12}$

1.67

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ (1)

Sprawdźmy wzór dla n=1:

$L=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1=2=2^1=P$

Sprawdźmy wzór dla n=2:

$L=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}=\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=1+2+1=4=2^2=P$

Zakładamy teraz, że prawdziwe jest założenie indukcyjne dla $m\geq1$ i m∈N:

$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^m$ (2)

a twierdzimy, że spełniona jest teza indukcyjna:

$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}=2^{m+1}$ (3)

Lewe strony wzorów (2) i (3) różnią się o:

$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=\binom{m+1}{0}+\binom{m+1}{1}+\ldots+\binom{m+1}{m}+\binom{m+1}{m+1}-[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{m}]$

korzystamy teraz z wzorów $\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m+1}{k}$, $\binom{m}{0}=\binom{m+1}{0}$ oraz $\binom{m}{m}=\binom{m+1}{m+1}$ i dostajemy

$\binom{m}{0}+[\binom{m}{1}+\binom{m}{0}]+\ldots+[\binom{m}{m}+\binom{m}{m-1}]+\binom{m}{m}-\binom{m}{0}-\binom{m}{1}-\ldots-\binom{m}{m}=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{m-1}+\binom{m}{m}=$

$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^m$

Prawe strony wzorów (2) i (3) różnią się o:

$2^{m+1}-2^m=2\cdot 2^m-2^m=2^m\cdot(2-1)=2^m$

Czyli prawe strony różnią się o tyle samo. Zatem udowodniliśmy, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna. Czyli wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n\geq 1$ i n∈N.

1.68

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ (1)

Sprawdźmy wzór dla n=1:

$\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{1}{k}=(-1)^0\binom{1}{0}+(-1)^1\binom{1}{1}=\binom{1}{0}-\binom{1}{1}=1-1=0$

Sprawdźmy wzór dla n=2:

$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{2}{k}=(-1)^0\binom{2}{0}+(-1)^1\binom{2}{1}+(-1)^2\binom{2}{2}=\binom{2}{0}-\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=1-2+1=0$

Zakładamy teraz, że prawdziwe jest założenie indukcyjne dla $m\geq 1$ i m∈N:

$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}=0$ (2)

a twierdzimy, że prawdziwa jest teza indukcyjna:

$\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}=0$ (3)

Prawe strony równań (2) i (3) różnią się o 0. Sprawdźmy o ile różnią się ich lewe strony:

$\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}=(-1)^0\binom{m+1}{0}+(-1)^1\binom{m+1}{1}+\ldots+(-1)^m\binom{m+1}{m}+(-1)^{m+1}\binom{m+1}{m+1}-$

$-[(-1)^0\binom{m}{0}+(-1)^1\binom{m}{1}+\ldots+(-1)^m\binom{m}{m}]=$ korzystamy z wzoru $\binom{m+1}{k}=\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}$

$= (-1)^0\binom{m+1}{0} + (-1)^1[\binom{m}{1} + \binom{m}{0}] + \ldots + (-1)^m[\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}] + (-1)^{m+1}\binom{m+1}{m+1} -$

$-(-1)^0\binom{m}{0} - (-1)^1\binom{m}{1} - \ldots - (-1)^m\binom{m}{m}$ (4)

Dla m parzystego równość (4) przybiera postać:

$(4) = \binom{m+1}{0} - [\binom{m}{1} + \binom{m}{0}] + \ldots + [\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}] - \binom{m+1}{m+1} - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} - \ldots - \binom{m}{m} =$
$= \binom{m+1}{0} - [\binom{m}{1} + \binom{m}{0}] + [\binom{m}{2} + \binom{m}{1}] - \ldots + [\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}] - \binom{m+1}{m+1} - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} - \binom{m}{2} \ldots - \binom{m}{m} =$

pierwsze człony wyrażeń w nawiasach kwadratowych zostaną wyzerowane przez wyrażenia oznaczone kolorem czerwonym:

$= \binom{m+1}{0} - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m-1} - \binom{m+1}{m+1} - \binom{m}{0} =$

korzystamy z wzorów $\binom{m+1}{0} = \binom{m}{0}$ i $\binom{m+1}{m+1} = \binom{m}{m}$:

$= \binom{m}{0} - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m-1} - \binom{m}{m} - \binom{m}{0} = -[\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots - \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m}] =$
$-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}$ = korzystamy z wzoru (2) $= -0 = 0$

czyli lewe strony równań (2) i (3) również różnią się o 0.

Dla m nieparzystego równość (4) przybiera postać:

$(4) = \binom{m+1}{0} - [\binom{m}{1} + \binom{m}{0}] + \ldots - [\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}] + \binom{m+1}{m+1} - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} - \ldots + \binom{m}{m} =$
$= \binom{m+1}{0} - [\binom{m}{1} + \binom{m}{0}] + [\binom{m}{2} + \binom{m}{1}] - \ldots - [\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}] + \binom{m+1}{m+1} - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} - \binom{m}{2} \ldots + \binom{m}{m} =$

pierwsze człony wyrażeń w nawiasach kwadratowych zostaną wyzerowane przez wyrażenia oznaczone kolorem czerwonym:

$= \binom{m+1}{0} - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots - \binom{m}{m-1} + \binom{m+1}{m+1} - \binom{m}{0} =$

korzystamy z wzorów $\binom{m+1}{0} = \binom{m}{0}$ i $\binom{m+1}{m+1} = \binom{m}{m}$:

$= \binom{m}{0} - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots - \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} - \binom{m}{0} = -[\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots + \binom{m}{m-1} - \binom{m}{m}] =$
$-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}$ = korzystamy z wzoru (2) $= -0 = 0$

czyli lewe strony równań (2) i (3) również różnią się o 0.

Zatem udowodniliśmy, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna. Czyli wzór (1) jest prawdziwy dla każdego$n \geq 1$ i n∈N.

1.69

$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} a^k b^{p-k} = \binom{n}{p}(a+b)^p \qquad n \geq p \geq 0 \qquad (1)$

$\binom{n}{p}(a+b)^p = \binom{n}{p}(b+a)^p = \binom{n}{p}(b+a)^p = \binom{n}{p}[\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b^{p-k} a^k] = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{p}\binom{p}{k} a^k b^{p-k} \qquad (2)$

Zatem, żeby dowieść wzoru (1) wystarczy dowieść, że:

$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$

$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(p-k)![(n-k)-(p-k)]!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-k-p+k)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!p!}{p!(n-p)!k!(p-k)!} =$
$= \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$
co należało udowodnić.

1.70

$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p} \qquad n \geq p \geq 0 \qquad (1)$

W zadaniu 1.69 wykazaliśmy, że:

$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$

Zatem:

$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{p}[\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}] \qquad (2)$

W zadaniu 1.67 udowodniliśmy, że:

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad (3)$

zatem

$\binom{n}{p}[\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}] = \binom{n}{p} \cdot 2^p = 2^p\binom{n}{p}$

co należało udowodnić.

1.71

$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=0 \qquad n\geq p\geq 0 \qquad (1)$

W zadaniu 1.69 wykazaliśmy, że:

$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{n}{p}\binom{p}{k}$

Zatem mamy:

$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{p}\binom{p}{k}=\binom{n}{p}\cdot[\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}] \qquad (2)$

W zadaniu 1.68 wykazaliśmy prawdziwość wzoru:

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \qquad (3)$

Zatem z (2) i (3) wynika:

$\binom{n}{p}\cdot[\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}]=\binom{n}{p}\cdot 0=0$

co należało udowodnić.

1.72

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}b^k$

$\sum_{k=0}^{n}(n-k)=120$, n = ?

Mamy:

$\sum_{k=0}^{n}(n-k)=n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+[n-(n-2)]+[n-(n-1)]+(n-n)=$

$=n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1=1+2+3+\ldots+(n-1)+n=120$

W zadaniu 1.59 udowodniliśmy wzór:

$1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Zatem mamy:

$\frac{n(n+1)}{2}=120$

$n(n+1)=240$

$n^2+n-240=0$

$\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-240)=1+4\cdot 240=1+960=961$

$\sqrt{\Delta} = 31$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$n_1 = \frac{-1-31}{2\cdot 1}$ $\quad$ $n_2 = \frac{-1+31}{2\cdot 1}$

$n_1 = \frac{-32}{2}$ $\quad$ $n_2 = \frac{30}{2}$

$n_1 = -16$ $\quad$ $n_2 = 15$

Ponieważ szukamy pierwiastka n∈N, więc rozwiązaniem jest n = 15.

1.73

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k$

$\sum_{k=0}^{n} k = 45$, n = ?

Mamy:

$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + 45$

W zadaniu 1.59 udowodniliśmy wzór:

$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Zatem mamy:

$\frac{n(n+1)}{2} = 45$

$n(n+1) = 90$

$n^2 + n - 90 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 1 + 4 \cdot 90 = 1 + 360 = 361$

$\sqrt{\Delta} = 19$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$n_1 = \frac{-1-19}{2\cdot 1}$ $\quad$ $n_2 = \frac{-1+19}{2\cdot 1}$

$n_1 = \frac{-20}{2}$ $\quad$ $n_2 = \frac{18}{2}$

$n_1 = -10$ $\quad$ $n_2 = 9$

Ponieważ szukamy pierwiastka n∈N, więc rozwiązaniem jest n = 9.

1.74

Z każdego punktu możemy poprowadzić proste do $n-1$ pozostałych punktów. Ponieważ punktów jest n, więc mamy $n \cdot (n-1)$ tak poprowadzonych prostych. Ale każda prosta jest liczona podwójnie bo np. dla punktów A i B liczone są proste $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$. Zatem ostatecznie różnych prostych jest:

$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

1.75

$(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$, współczynnik przy trzecim wyrazie = 28.

Powyższe wyrażenie jest określone dla:

$1 + x \geq 0 \qquad \wedge \qquad 1 - x \geq 0$

$x \geq -1 \qquad \wedge \qquad x \leq 1$

Przyjmijmy:

$a = \sqrt{1+x}, \qquad b = -\sqrt{1-x} \qquad (1)$

Mamy:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k}b^k = a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$

Z warunków zadania mamy:

$\binom{n}{2} = 28$

$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 28$

$\frac{n(n-1)}{2} = 28 \qquad / \cdot 2$

$n(n-1) = 56$

$n^2 - n - 56 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 1 + 4 \cdot 56 = 1 + 224 = 225$

$\sqrt{\Delta} = 15$

$\mathrm{n}_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \mathrm{n}_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\mathrm{n}_1 = \frac{1-15}{2} \qquad \mathrm{n}_2 = \frac{1+15}{2}$

n_1= -7 $\qquad$ n_2= 8

Ponieważ szukamy n∈N, więc szukanym n jest n = 8.

A więc środkowy wyraz rozwinięcia dwumianu danego w zadaniu jest dla $k = \frac{0+8}{2} = 4$, czyli:

$\mathrm{T}_5 = \binom{8}{4} \cdot a^4b^4 = \frac{8!}{4!4!}a^4b^4 = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^4b^4 = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{6\cdot4}a^4b^4 = 5\cdot7\cdot2a^4b^4 = 70a^4b^4$

I podstawiając (1) otrzymujemy:

$\mathrm{T}_5 = 70(\sqrt{1+x})^4(-\sqrt{1-x})^4 = 70(1+x)^2(1-x)^2 = 70[(1+x)(1-x)]^2 = 70(1-x^2)^2 =$

$= 70(1-2x+x^4) = 70x^4 - 140x + 70$

1.76

$(\sqrt[3]{a} - \sqrt{a^{-1}})^{15} = \sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\cdot(\sqrt[3]{a})^{15-k}\cdot(\sqrt{a^{-1}})^k = \sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\cdot(a^{\frac{1}{3}})^{15-k}\cdot(a^{-\frac{1}{2}})^k =$

$\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\cdot a^{\frac{15-k}{3}}\cdot a^{-\frac{k}{2}} = \sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\cdot a^{\frac{15-k}{3}-\frac{k}{2}}$

Wyraz powyższego rozwinięcia nie będzie zawierał a wtedy i tylko wtedy, gdy:

$\frac{15-k}{3} - \frac{k}{2} = 0 \qquad / \cdot 6$

$2\cdot(15-k) - 3k = 0$

$30 - 2k - 3k = 0$

$2k + 3k = 30$

$5k = 30 \qquad / : 5$

$k = 6$

Czyli szukanym wyrazem jest:

$T_7 = \binom{15}{6}\cdot a^{\frac{15-6}{3}-\frac{6}{2}} = \binom{15}{6}\cdot a^{\frac{9}{3}-3} = \binom{15}{6}\cdot a^{3-3} = \binom{15}{6}\cdot a^0 = \binom{15}{6} = \frac{15!}{6!\cdot(15-6)!} = \frac{15!}{6!9!} = \frac{10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{6!} =$

$\frac{10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = \frac{10}{2}\cdot11\cdot\frac{12}{6}\cdot13\cdot14\cdot\frac{15}{5}\cdot\frac{1}{12} = 5\cdot11\cdot2\cdot13\cdot14\cdot3\cdot\frac{1}{12} = 55\cdot13\cdot14\cdot\frac{6}{12} = 55\cdot13\cdot7 = 5005$

1.77

$(x+y)^n, \qquad\qquad$ n=?

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}y^k$

$T_2 = \binom{n}{1}\cdot x^{n-1}y^1$

$T_3 = \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}y^2$

$T_4 = \binom{n}{3}\cdot x^{n-3}y^3,$

żeby istniały wszystkie powyższe wyrazy musi być $n \geq 3$ (1)

Współczynniki wyrazów T_2, T_3 i T_4 tworzą postęp arytmetyczny, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2}$

$\frac{n!}{2!(n-2)!} - \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!}$

$\frac{1}{2} \cdot (n-1)n - n = \frac{1}{6} \cdot (n-2)(n-1)n$- $\frac{1}{2} \cdot (n-1)n \qquad / \cdot \frac{6}{n}$

$3(n-1) - 6 = (n-2)(n-1) - 3(n-1)$

$3n - 3 - 6 = n^2 - n - 2n + 2 - 3n + 3$

$3n - 9 = n^2 - 6n + 5$

$n^2 - 9n + 14 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 81 - 56 = 25$

$n_1 = \frac{-(-9)-\sqrt{25}}{2 \cdot 1}$ $\qquad n_2 = \frac{-(-9)+\sqrt{25}}{2 \cdot 1}$

$n_1 = \frac{9-5}{2}$ $\qquad n_2 = \frac{9+5}{2}$

$n_1 = 2$ $\qquad n_2 = 7$

Uwzględniając warunek (1) otrzymujemy jedyne rozwiązanie n=7. Zatem współczynniki wyrazów drugiego, trzeciego i czwartego tworzą postęp arytmetyczny dla n=7.

1.78

$(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot (\sqrt[3]{3})^{5-k} \cdot (\sqrt{2})^k$ (1)

Zatem $(\sqrt[3]{3})^{5-k}$ nie zawiera niewymierności dla:

$5 - k = 0$ lub $5 - k = 3$

czyli dla:

$k = 5$ lub $k = 2$

Natomiast $(\sqrt{2})^k$ nie zawiera niewymierności dla:

$k = 0$ lub $k = 2$ lub $k = 4$

Więc jedynym wyrazem rozwinięcia (1) który nie zawiera niewymierności jest wyraz trzeci (dla k=2).

$T_3 = \binom{5}{2} \cdot (\sqrt[3]{3})^3 \cdot (\sqrt{2})^2 = \binom{5}{2} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot 6 = \frac{5!}{2 \cdot 3!} \cdot 6 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 6 = 20 \cdot 3 = 60$

1.79

$(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a})^n, \qquad T_5 = ?$

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{11}{2}$

$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} = \frac{11}{2}$

$\frac{\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}}{\frac{n!}{1! \cdot (N-1)!}} = \frac{11}{2}$

$\frac{\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n}{n} = \frac{11}{2} \qquad / \cdot 2$

$n - 1 = 11$

$n = 12$

Zatem:

$T_5 = \binom{12}{4} \cdot (\frac{a}{\sqrt{x}})^8 \cdot (\frac{\sqrt{x}}{a})^4 = \binom{12}{4} \cdot \frac{a^8}{x^4} \cdot \frac{x^2}{a^4} = \binom{12}{4} \cdot \frac{a^4}{x^2} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} \cdot \frac{a^8}{x^2} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^8 x^{-2} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3 \cdot a^4 x^{-2} =$
$= 15 \cdot 33 \cdot a^4 x^{-2} = 495 a^4 x^{-2}$

1.80

$(\frac{\sqrt{a}}{b-a} + \sqrt[3]{\frac{b^2-a^2}{a}})^n, \qquad T_4 = ?$

$a_2 = 21$

$a_2 = \binom{n}{2} = 21$

$\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 21$

$\frac{(n-1) \cdot n}{2} = 21 \qquad / \cdot 2$

$n^2 - n = 42$

$n^2 - n - 42 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42) = 1 + 168 = 169$

$\sqrt{\Delta} = 13$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$n_1 = \frac{1-13}{2}$ $\qquad$ $n_2 = \frac{1+13}{2}$

$n_1 = -6$ $\qquad$ $n_2 = 7$

Ponieważ szukamy $n \in N$, więc szukanym n jest n = 7.

A zatem:

$T_4 = \binom{7}{3} \cdot (\frac{\sqrt{a}}{b-a})^4 \cdot (\sqrt[3]{\frac{b^2-a^2}{a}})^3 = \binom{7}{3} \cdot \frac{a^2}{(b-a)^4} \cdot \frac{b^2-a^2}{a} = \binom{7}{3} \cdot \frac{a}{(b-a)^4} \cdot (b-a)(b+a) = \binom{7}{3} \cdot \frac{a(b+a)}{(b-a)^3} =$
$= \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{a(b+a)}{(b-a)^3} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a(b+a)}{(b-a)^3} = 35 \cdot \frac{a(b+a)}{(b-a)^3}$

1.81

$1,0005^{36} =?$

$1,0005^{36} = (1+0,0005)^{36} = \sum_{k=0}^{36} \binom{36}{k} \cdot 1^{36-k} \cdot 0,0005^k = \sum_{k=0}^{36} \binom{36}{k} \cdot 0,0005^k = \binom{36}{0} \cdot 0,0005^0 +$
$+\binom{36}{1} \cdot 0,0005^1 + \binom{36}{2} \cdot 0,0005^2 + \binom{36}{3} \cdot 0,0005^3 + \binom{36}{4} \cdot 0,0005^4 + \ldots + \binom{36}{35} \cdot 0,0005^{35} + \binom{36}{36} \cdot 0,0005^{36} = (1)$

$\binom{36}{0} = 1$ $\qquad$ $0,0005^0 = 1$

$\binom{36}{1} = 36$ $\qquad$ $0,0005^1 = 0,0005$

$\binom{36}{2} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 18 \cdot 35 = 630$ $\qquad$ $0,0005^2 = 0,00000025$

$\binom{36}{3} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7140$ $\qquad$ $0,0005^3 = 0,000000000125$

Czyli:

$T_1 = 1 \cdot 1 = 1$

$T_2 = 36 \cdot 0,0005 = 0,018$

$T_3 = 630 \cdot 0,00000025 = 0,0001575$

$T_4 = 7140 \cdot 0,000000000125 = 0,0000008925$

Widzimy, że od T_3 kolejne wyrazy są pomijalnie małe, zatem zsumujmy pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia: $T_1 + T_2 = 1,018$ z dokładnością 0,001.