Tw. 1.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ ma granicę a+b.

Tw. 2.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a, ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, przy czym żaden z wyrazów ciągu $\{b_n\}$ nie równa się zeru, ani też jego granica b nie jest równa zeru, to ciąg $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ ma granicę $\frac{a}{b}$.

Tw. 3.

Ciąg o wyrazie ogólnym $u_n = q^n$ ma skończoną granicę tylko dla $-1 < q \leq 1$, przy czym:

a). Jeżeli $-1 < q < 1$, to $lim_{n\to\infty} q^n = 0$

b). Jeżeli $q = 1$, to $q^n = 1$, więc $lim_{n\to\infty} q^n = 1$

Tw. 4.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach nieujemnych ma granicę a, to ciąg $\{\sqrt[p]{a_n}\}$, gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną, ma granicę $\sqrt[p]{a}$.

2.17

$u_n = \frac{n}{n+1}$

Zauważmy najpierw, że mianownik ułamka jest równy 0 dla n = -1. Zatem dla każdego $n \in N$ i $n\geq 1$ założenia twiedzenia 2 są spełnione.

Podzielmy licznik i mianownik przez n:

$u_n = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2, mamy:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1+\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

2.18

$u_n = \frac{4n-3}{6-5n}$

Zauważmy najpierw, że mianownik ułamka jest równy 0 dla n = $\frac{6}{5}$. Zatem dla każdego $n \in N$ i $n\geq 1$ założenia twiedzenia 2 są spełnione.

Podzielmy licznik i mianownik przez n:

$u_n = \frac{\frac{4n}{n}-\frac{3}{n}}{\frac{6}{n}-\frac{5n}{n}} = \frac{4-\frac{3}{n}}{\frac{6}{n}-5}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2, otrzymujemy:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 4 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} + \lim_{n\to\infty} 5} = \frac{4-0}{0-5} = -\frac{4}{5}$

2.19

$u_n = \frac{n^2-1}{3-n^3}$

Mianownik powyższego ułamka jest równy 0 $\Leftrightarrow n^3 = 3 \Leftrightarrow n = \sqrt[3]{3}$, czyli dla liczby niewymiernej.

Zatem dla każdego $n \in N$ i $n\geq 1$ założenia twiedzenia 2 są spełnione.

Podzielmy licznik i mianownik przez n^3:

$u_n = \frac{\frac{n^2}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3} - \frac{n^3}{n^3}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3} - 1}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2, otrzymujemy:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3} - \lim_{n\to\infty} 1} = \frac{0-0}{0-1} = -\frac{0}{1} = 0$

2.20

$u_n = \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$

Zbadajmy najpierw dla jakich n mianownik powyższego ułamka jest równy 0:

$6n + 3n^2 - n^3 = 0$

$n(6 + 3n - n^2) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee -n^2 + 3n + 6 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 9 + 24 = 33$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$

, czyli oba pierwiastki powyższego trójmianu są liczbami niewymiernymi. Zatem dla każdego $n \in N$ i $n\geq 1$ założenia twiedzenia 2 są spełnione.

Podzielmy licznik i mianownik przez n^3:

$u_n = \frac{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{4n}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{6n}{n^3} + \frac{3n^2}{n^3} - \frac{n^3}{n^3}} = \frac{2 - \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{6}{n^2} + \frac{3}{n} - 1}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty} 2 - lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} - lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{lim_{n\to\infty} \frac{6}{n^2} + lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} - lim_{n\to\infty} 1} = \frac{2-0-0}{0+0-1} = \frac{2}{-1} = -2$

2.21

$u_n = \frac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5}$

Zauważmy najpierw, że mianownik zawsze jest dodatni (większy lub równy 5). Przekształćmy więc wyraz ogólny:

$u_n = \frac{n^2+3n-n-3}{3n^2+5} = \frac{n^2+2n-3}{3n^2+5}$

Podzielmy licznik i mianownik przez n^2:

$u_n = \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}-\frac{3}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}} = \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty} 1 + lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}{lim_{n\to\infty} 3 + lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{1+0-0}{3+0} = \frac{1}{3}$

2.22

$u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$

Musi zachodzić:

$4n - 1 \neq 0 \qquad \wedge \qquad 3n + 2 \neq 0$

$4n \neq 1 \qquad \wedge \qquad 3n \neq -2$

$n \neq \frac{1}{4} \qquad \wedge \qquad n \neq -\frac{2}{3}$

Ponieważ $n \in N \quad \wedge \quad n \geq 1$, więc powyższe dwa warunki są spełnione. Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu:

$u_n = \frac{4n^2-4n+1}{12n^2+8n-3n-2} = \frac{4n^2-4n+1}{12n^2+5n-2}$

Podzielmy licznik i mianownik przez n^2:

$u_n = \frac{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{4n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{12n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}-\frac{2}{n^2}} = \frac{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{12+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty} 4 - lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} + lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{lim_{n\to\infty} 12 + lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} - lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{4-0+0}{12+0-0} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

2.23

$u_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$

Musi zachodzić:

$(4n-1)^2(1-5n) \neq 0 \qquad (1)$

$4n - 1 \neq 0 \qquad \wedge \qquad 1 - 5n \neq 0$

$4n \neq 1 \quad \wedge \quad 5n \neq 1$

$n \neq \frac{1}{4} \quad \wedge \quad n \neq \frac{1}{5}$

Ponieważ $n \in N \quad \wedge \quad n > 0$, więc nierówność (1) zawsze jest spełniona.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)} = \frac{(2n)^3-3\cdot(2n)^2\cdot 1+3\cdot 2n\cdot 1^2-1^3}{[(4n)^2-2\cdot 4n\cdot 1+1^2](1-5n)} = \frac{8n^3-12n^2+6n-1}{(16n^2-8n+1)(1-5n)} = \frac{8n^3-12n^2+6n-1}{16n^2-80n^3-8n+40n^2+1-5n} =$
$= \frac{8n^3-12n^2+6n-1}{-80n^3+56n^2-13n+1}$

Podzielmy licznik i mianownik przez n^3:
$u_n = \frac{\frac{8n^3}{n^3}-\frac{12n^2}{n^3}+\frac{6n}{n^3}-\frac{1}{n^3}}{\frac{-80n^3}{n^3}+\frac{56n^2}{n^3}-\frac{13n}{n^3}+\frac{1}{n^3}} = \frac{8-\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{-80+\frac{56}{n}-\frac{13}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty}u_n = \frac{lim_{n\to\infty}8-lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}+lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}-lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{lim_{n\to\infty}-80+lim_{n\to\infty}\frac{56}{n}-lim_{n\to\infty}\frac{13}{n^2}+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = \frac{8-0+0-0}{-80+0-0+0} = -\frac{8}{80} = -\frac{1}{10}$

2.24

$u_n = \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$

Musi zachodzić warunek $n > 0$ a ponieważ $n \in N \;\wedge\; n > 0$, więc warunek ten jest spełniony.

Zatem wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Korzystając z twierdzenia 1 mamy:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} - lim_{n\to\infty}\frac{10}{\sqrt{n}} = 0 - 0 = 0$

2.25

$u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$

Musi zachodzić:

$2n - 1 \neq 0$

$2n \neq 1$

$n \neq \frac{1}{2}$

Ponieważ $n \in N \;\wedge\; n > 0$, więc warunek ten zawsze jest spełniony i wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Podzielmy licznik i mianownik przez n:

$$u_n = \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}} = \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} & dla\ n\ parzystego \\ \frac{-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} & dla\ n\ nieparzystego \end{cases}$$

Korzystając z twierdzeń 1 i dwa mamy:

$$lim_{n\to\infty}u_n = \begin{cases} \frac{lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{lim_{n\to\infty}2-lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} & dla\ n\ parzystego \\ \frac{lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}}{lim_{n\to\infty}2-lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} & dla\ n\ nieparzystego \end{cases}$$

$$lim_{n\to\infty}u_n = \begin{cases} \frac{0}{2-0} = 0 & dla\ n\ parzystego \\ \frac{0}{2-0} = 0 & dla\ n\ nieparzystego \end{cases}$$

czyli:

$lim_{n\to\infty}u_n = 0$

2.26

$u_n = (\frac{2n-3}{3n+1})^2$

Zauważmy, że dla każdego $n \in N\ \wedge\ n > 0$ mianownik dowolnego wyrazu ciągu jest > 0 a co za tym idzie każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu:

$u_n = (\frac{2n-3}{3n+1})^2 = \frac{4n^2-12n+9}{9n^2+6n+1}$

Podzielmy teraz licznik i mianownik przez n^2:

$u_n = \frac{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{12n}{n^2}+\frac{9}{n^2}}{\frac{9n^2}{n^2}+\frac{6n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{4-\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}}{9+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty}u_n = \frac{lim_{n\to\infty}4-lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}+lim_{n\to\infty}\frac{9}{n^2}}{lim_{n\to\infty}9+lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{4-0+0}{9+0+0} = \frac{4}{9}$

2.27

$u_n = (\frac{5n-2}{3n-1})^3$

Zbadajmy najpierw dla jakiego n mianownik ułamka jest równy 0:

$3n - 1 = 0$

$3n = 1$

$n = \frac{1}{3}$

A więc dla każdego $n \in N \ \wedge \ n > 0$ każdy wyraz ciągu jest określony.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu:

$u_n = (\frac{5n-2}{3n-1})^3 = \frac{125n^3-3\cdot(25n^2)\cdot 2+3\cdot 5n\cdot 4-8}{27n^3-3\cdot(9n^2)\cdot 1+3\cdot 3n\cdot 1-1} = \frac{125n^3-150n^2+60n-8}{27n^3-27n^2+9n-1}$

Podzielmy licznik i mianownik przez n^3:

$u_n = \frac{\frac{125n^3}{n^3}-\frac{150n^2}{n^3}+\frac{60n}{n^3}-\frac{8}{n^3}}{\frac{27n^3}{n^3}-\frac{27n^2}{n^3}+\frac{9n}{n^3}-\frac{1}{n^3}} = \frac{125-\frac{150}{n}+\frac{60}{n^2}-\frac{8}{n^3}}{27-\frac{27}{n}+\frac{9}{n^2}-\frac{1}{n^3}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty}125-lim_{n\to\infty}\frac{150}{n}+lim_{n\to\infty}\frac{60}{n^2}-lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}}{lim_{n\to\infty}27-lim_{n\to\infty}\frac{27}{n}+lim_{n\to\infty}\frac{9}{n^2}-lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = \frac{125-0+0-0}{27-0+0-0} = \frac{125}{27}$

2.28

$u_n = \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$

Zauważmy, że dla każdego $n \in N \ \wedge \ n > 0$ mianownik dowolnego wyrazu ciągu jest różny od 0 oraz wyrażenie podpierwiastkowe jest większe od 0 a co za tym idzie każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu:

$u_n = \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1} = \frac{n+6\sqrt{n}+9}{n+1}$

Podzielmy licznik i mianownik przez n:

$u_n = \frac{\frac{n}{n}+\frac{6\sqrt{n}}{n}+\frac{9}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{1+\frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}+\frac{9}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1+\frac{6}{\sqrt{n}}+\frac{9}{n}}{1+\frac{1}{n}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 mamy:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty}1+lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{n}}+lim_{n\to\infty}\frac{9}{n}}{lim_{n\to\infty}1+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1$

2.29

$u_n = \frac{\sqrt{n}-2}{3n+5}$

Zauważmy, że dla każdego $n \in N \ \wedge \ n > 0$ mianownik dowolnego wyrazu ciągu jest różny od 0 oraz wyrażenie podpierwiastkowe jest większe od 0 a co za tym idzie każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu dzieląć licznik i mianownik przez n:

$u_n = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{2}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{5}{n}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}-\frac{2}{n}}{3+\frac{5}{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}}{3+\frac{5}{n}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty}u_n = \frac{lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} - lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{lim_{n\to\infty}3 + lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}} = \frac{0-0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$

2.30

$u_n = \frac{n-10}{3}$

Zauważmy, że przy rosnącym do nieskończoności n, kolejne wyrazy ciągu $\{u_n\}$ również rosną do nieskończoności a więc $lim_{n\to\infty}u_n = \infty$.

2.31

$u_n = \frac{(-0{,}8)^n}{2n-5}$

Korzystając z twierdzenia 3 widzimy, że dla $n \to \infty$ licznik powyższego ułamka dąży do 0, natomiast mianownik dąży do ∞. Zatem $lim_{n\to\infty}u_n = 0$.

2.32

$u_n = \frac{2-5n-10n^2}{3n+15}$

Zauważmy, że dla każdego $n \in N \ \wedge \ n > 0$ mianownik dowolnego wyrazu ciągu jest różny od 0, zatem każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Podzielmy licznik i mianownik ciągu $\{u_n\}$ przez najwyższą potęgę zmiennej naturalnej n występującą w mianowniku:

$u_n = \frac{\frac{2}{n} - \frac{5n}{n} - \frac{10n^2}{n}}{\frac{3n}{n} + \frac{15}{n}} = \frac{-10n-5+\frac{2}{n}}{3+\frac{15}{n}}$

Zatem widzimy, że dla $n \to \infty$ licznik ułamka dąży do $-\infty$ natomiast mianownik dąży do 3.

A więc ciąg $\{u_n\}$ dąży do $-\infty$.

2.33

$u_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$

Dla każdego $n \in N \ \wedge \ n > 0$ mianownik powyższego ułamka jest różny od 0, więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Podzielmy teraz licznik i mianownik przez n:

$u_n = \frac{\frac{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{n}}{\frac{n}{n}} = \frac{2+\frac{(-1)^n}{n}}{1}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 mamy:

$lim_{n\to\infty}u_n = \frac{lim_{n\to\infty}2+lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}}{lim_{n\to\infty}1} = \frac{2+0}{1} = 2$

2.34

$u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$

Dla każdego $n \in N \ \wedge \ n > 0$ zarówno wyrażenia pod pierwiastkami są nieujemne oraz mianownik ułamka jest różny od 0, a więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{\sqrt{n^2}} = \sqrt{\frac{1+2n^2}{n^2}} - \sqrt{\frac{1+4n^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}+2} - \sqrt{\frac{1}{n^2}+4}$

Widzimy teraz, że przy $n \to \infty$ pierwszy pierwiastek dąży do $\sqrt{2}$, natomiast drugi dąży do $\sqrt{4} = 2$. Zatem korzystając z twierdzenia 1 otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty}u_n = \sqrt{2} - 2$

2.35

$u_n = \sqrt{\frac{3n-2}{n+10}}$

Musi zachodzić

$n + 10 \neq 0 \qquad \wedge \qquad \frac{3n-2}{n+10} \geq 0$

$n \neq -10 \qquad \wedge \qquad 3(n - \frac{2}{3})(n + 10) \geq 0$

Widzimy, że dla $n \in N \ \wedge \ n > 0$ oba powyższe wyrażenia są spełnione a więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Podzielmy teraz licznik i mianownik wyrażenia podpierwiastkowego przez n:

$u_n = \sqrt{\frac{\frac{3n}{n}-\frac{2}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{10}{n}}} = \sqrt{\frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{10}{n}}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy, że wyrażenie podpierwiastkowe dąży do 3.

Zatem $lim_{n\to\infty}u_n = \sqrt{3}$

2.36

$u_n = \sqrt[3]{\frac{n-1}{8n+10}}$

Musi zachodzić

$8n + 10 \neq 0 \qquad \wedge \qquad \frac{n-1}{8n+10} \geq 0$

$n \neq -\frac{10}{8} \qquad \wedge \qquad (n-1)\cdot 8\cdot(n+\frac{10}{8}) \geq 0$

$n \neq -\frac{5}{4} \qquad \wedge \qquad (n-1)\cdot 8\cdot(n+\frac{5}{4}) \geq 0$

Widzimy, że dla $n \in N \ \wedge \ n > 0$ oba powyższe wyrażenia są spełnione a więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Podzielmy teraz licznik i mianownik wyrażenia podpierwiastkowego przez n:

$u_n = \sqrt[3]{\frac{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{8n}{n}+\frac{10}{n}}} = \sqrt[3]{\frac{1-\frac{1}{n}}{8+\frac{10}{n}}}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy, że wyrażenie podpierwiastkowe dąży do:

$lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{8+\frac{10}{n}} = \frac{lim_{n\to\infty}1-lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{lim_{n\to\infty}8+lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}} = \frac{1-0}{8+0} = \frac{1}{8}$

A zatem $lim_{n\to\infty}u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

2.37

$u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$

Zauważmy najpierw, że dla $n \in N \ \wedge \ n > 0$ zarówno wyrażenie podpierwiastkowe w liczniku jest nieujemne oraz mianownik ułamka jest różny od 0. Zatem każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Podzielmy teraz licznik i mianownik ułamka przez n:

$u_n = \frac{\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}}{\frac{3n-2}{n}} = \frac{\sqrt{\frac{n^2+4}{n^2}}}{\frac{3n}{n}-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2 i 4 obliczmy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty}u_n = \frac{lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{lim_{n\to\infty}(3-\frac{2}{n})} = \frac{\sqrt{lim_{n\to\infty}(1+\frac{4}{n^2})}}{lim_{n\to\infty}3-lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{lim_{n\to\infty}1+lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}}{3-0} = \frac{\sqrt{1+0}}{3} = \frac{1}{3}$

2.38

$u_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$

Zauważmy najpierw, że dla $n \in N \ \wedge \ n > 0$ oba wyrażenia podpierwiastkowe są nieujemne oraz mianownik ułamka jest różny od 0. Zatem każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Podzielmy licznik i mianownik przez n:

$u_n = \frac{\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}}{\frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n}} = \frac{\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}}{\sqrt[3]{\frac{n^3+1}{n^3}}} = \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}+\frac{1}{n^3}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2 i 4 obliczamy granicę ciągu u_n:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}} = \frac{\sqrt{lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})}}{\sqrt[3]{lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^3})}} = \frac{\sqrt{1-0}}{\sqrt[3]{1+0}} = \frac{1}{1} = 1$

2.39

$u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n}-n}$

Musi zachodzić: $8n^3 - n \geq 0 \quad (1) \quad \sqrt[3]{8n^3-n} - n \neq 0 \quad (2)$

$n(8n^2-1) \geq 0$

Widzimy więc, że dla $n \in N \ \wedge \ n > 0$, warunek (1) jest spełniony.

$\sqrt[3]{8n^3-n} - n = 2n \cdot \sqrt[3]{1-\frac{1}{8n^2}} - n \geq 2n \cdot (\sqrt[3]{1-\frac{1}{8}} - \frac{1}{2}) = 2n \cdot (\sqrt[3]{\frac{7}{8}} - \frac{1}{2}) = 2n \cdot (\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{7} - \frac{1}{2}) =$
$= n \cdot (\sqrt[3]{7} - 1) > n \cdot (\sqrt[3]{1} - 1) = 0$

Zatem warunek (2) również jest spełniony.

Czyli każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Podzielmy teraz licznik i mianownik ułamka $\{u_n\}$ przez n:

$u_n = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt[3]{8n^3-n}-n}{n}} = \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{8n^3-n}}{n} - \frac{n}{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{8n^3-n}{n^3}}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^2}}-1}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2 i 4 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty} 1}{lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^2}} - lim_{n\to\infty} 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{lim_{n\to\infty} 8 - lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{8-0}-1} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$

2.40

$u_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$

Zauważmy, że dla $n \in N \ \wedge \ n > 0$ wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie. Ponadto mianownik tego ułamka musi być różny od 0. Ponadto mamy

$\sqrt{4n^2+7n} - 2n > \sqrt{4n^2} - 2n = 2n - 2n = 0$

czyli mianownik zawsze jest różny od 0. Zatem każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy ogólny wyraz ciągu $\{u_n\}$ korzystając z wzoru:

$a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$

$u_n = \frac{1}{\frac{(\sqrt{4n^2+7n})^2-(2n)^2}{\sqrt{4n^2+7n}+2n}} = \frac{\sqrt{4n^2+7n}+2n}{4n^2+7n-4n^2} = \frac{\sqrt{4n^2+7n}+2n}{7n}$

Podzielmy teraz licznik i mianownik ułamka przez n:

$\frac{\frac{\sqrt{4n^2+7n}}{n}+\frac{2n}{n}}{\frac{7n}{n}} = \frac{\sqrt{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{7n}{n^2}}+2}{7} = \frac{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2}{7}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2 i 4 obliczamy granicę ciągu:

$$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2}{7} = \frac{lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{7}{n}}+lim_{n\to\infty}2}{lim_{n\to\infty}7} = \frac{\sqrt{lim_{n\to\infty}4+lim_{n\to\infty}\frac{7}{n}}+2}{7} = \frac{\sqrt{4+0}+2}{7} = \frac{2+2}{7} = \frac{4}{7}$$