Tw. 1.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ ma granicę a+b.

Tw. 2.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n - b_n\}$ ma granicę a-b.

Tw. 3.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n \cdot b_n\}$ ma granicę a·b.

Tw. 4.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a, ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, przy czym żaden z wyrazów ciągu $\{b_n\}$ nie równa się zeru, ani też jego granica b nie jest równa zeru, to ciąg $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ ma granicę $\frac{a}{b}$.

Tw. 5.

Ciąg o wyrazie ogólnym $u_n = q^n$ ma skończoną granicę tylko dla $-1 < q \leq 1$, przy czym:

a). Jeżeli $-1 < q < 1$, to $lim_{n\to\infty} q^n = 0$

b). Jeżeli $q = 1$, to $q^n = 1$, więc $lim_{n\to\infty} q^n = 1$

Tw. 6.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach nieujemnych ma granicę a, to ciąg $\{\sqrt[p]{a_n}\}$, gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną, ma granicę $\sqrt[p]{a}$.

Tw. 7. O trzech ciągach

Jeżeli wyrazy ogólne trzech ciągów $\{a_n\}$, $\{u_n\}$, $\{b_n\}$ spełniają dla $n \geq n_0$ nierówność:

$a_n \leq u_n \leq b_n$

i jeżeli ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mają wspólną granicę g, tzn:

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} b_n = g$

to ciąg $\{u_n\}$ ma tę samą granicę, czyli:

$lim_{n\to\infty} u_n = g$

Wzór 1:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, dla $a > 0$

Wzór 2:

$lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$, jeżeli $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i $a_n \neq 0$

2.41

$u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ oba wyrażenia podpierwiastkowe są dodatnie. Zatem każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ korzystając z wzoru: $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$

$u_n = \frac{\sqrt{n+2}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

Widzimy, że dla $n \to \infty$ licznik jest równy 2 natomiast mianownik dąży do ∞, czyli cały ułamek dąży do 0, a więc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

2.42

$u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie, więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ korzystając z wzoru: $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$

$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n}^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

Podzielmy teraz licznik i mianownik powyższego ułamka przez n:

$u_n = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+\frac{n}{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

Korzystając z twierdzeń 1, 4 i 6 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty} 1} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{n\to\infty} 1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$

2.43

$u_n = n - \sqrt{n^2+5n}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie, więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ korzystając z wzoru: $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$

$u_n = \frac{n^2 - \sqrt{n^2+5n}^2}{n+\sqrt{n^2+5n}} = \frac{n^2-n^2-5n}{n+\sqrt{n^2+5n}} = \frac{-5n}{n+\sqrt{n^2+5n}}$

Podzielmy teraz licznik i mianownik powyższego ułamka przez n:

$u_n = \frac{\frac{-5n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n^2+5n}}{n}} = \frac{-5}{1+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}}} = \frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{n}}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 4 i 6 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty} -5}{\lim_{n\to\infty} 1+\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{5}{n}}} = \frac{-5}{1+\sqrt{\lim_{n\to\infty} 1+\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n}}} = \frac{-5}{1+\sqrt{1+0}} = -\frac{5}{2}$

2.44

$u_n = \sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}$

Musi zachodzić:

$3n^2+2n-5 \geq 0 \qquad (1)$

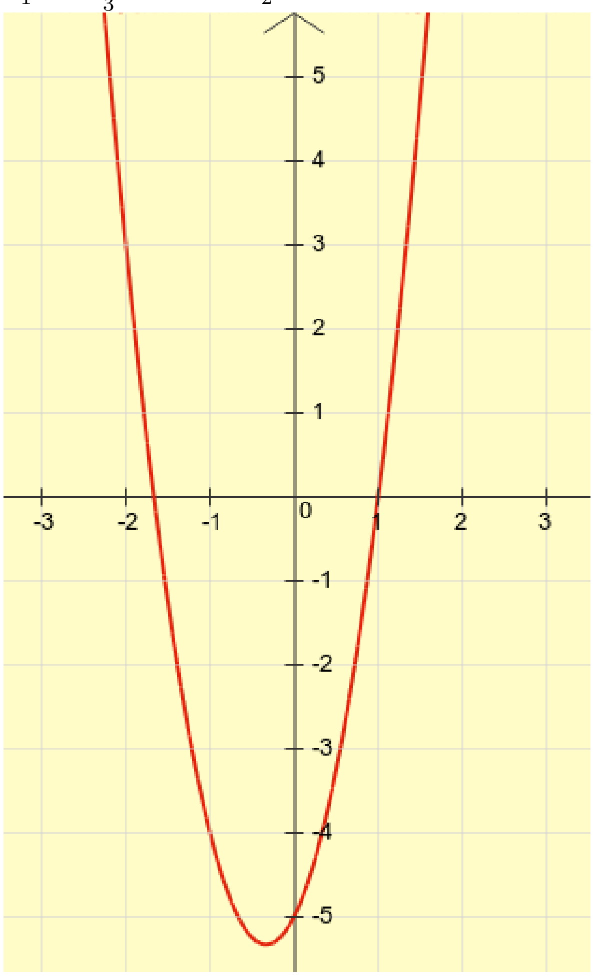
$\Delta = 2^2 - 4\cdot 3\cdot(-5) = 3+60 = 64$

$n_1 = \frac{-2-\sqrt{64}}{2\cdot 3} \qquad n_2 = \frac{-2+\sqrt{64}}{2\cdot 3}$

$n_1 = \frac{-2-8}{6} \qquad n_2 = \frac{-2+8}{6}$

$n_1 = \frac{-10}{6} \qquad n_2 = \frac{6}{6}$

$n_1 = -\frac{5}{3} \qquad n_2 = 1$



Z powyższego rysunku odczytujemy, że:

$(1) \Leftrightarrow n \in (-\infty; -\frac{5}{3} > \cup < 1; \infty)$

Ponieważ $n \in N$ i $n > 0$, więc warunek (1) zawsze jest spełniony a tym samym każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu korzystając z wzoru: $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$

$u_n = \frac{\sqrt{3n^2+2n-5}^2-(n\sqrt{3})^2}{\sqrt{3n^2+2n-5}+n\sqrt{3}} = \frac{3n^2+2n-5-3n^2}{\sqrt{3n^2+2n-5}+n\sqrt{3}} = \frac{2n-5}{\sqrt{3n^2+2n-5}+n\sqrt{3}}$

Podzielmy teraz licznik i mianownik powyższego ułamka przez n:

$u_n = \frac{\frac{2n-5}{n}}{\frac{\sqrt{3n^2+2n-5}+n\sqrt{3}}{n}} = \frac{2-\frac{5}{n}}{\sqrt{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}-\frac{5}{n^2}}+\sqrt{3}} = \frac{2-\frac{5}{n}}{\sqrt{3+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}+\sqrt{3}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 4 i 6 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 2-\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{3+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}+\lim_{n\to\infty} \sqrt{3}} = \frac{2-0}{\sqrt{\lim_{n\to\infty} 3+\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3+0-0}+\sqrt{3}} =$
$= \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2.45

$u_n = 3n - \sqrt{9n^2 + 6n - 15}$

Musi zachodzić:

$9n^2 + 6n - 15 \geq 0 \qquad (1)$

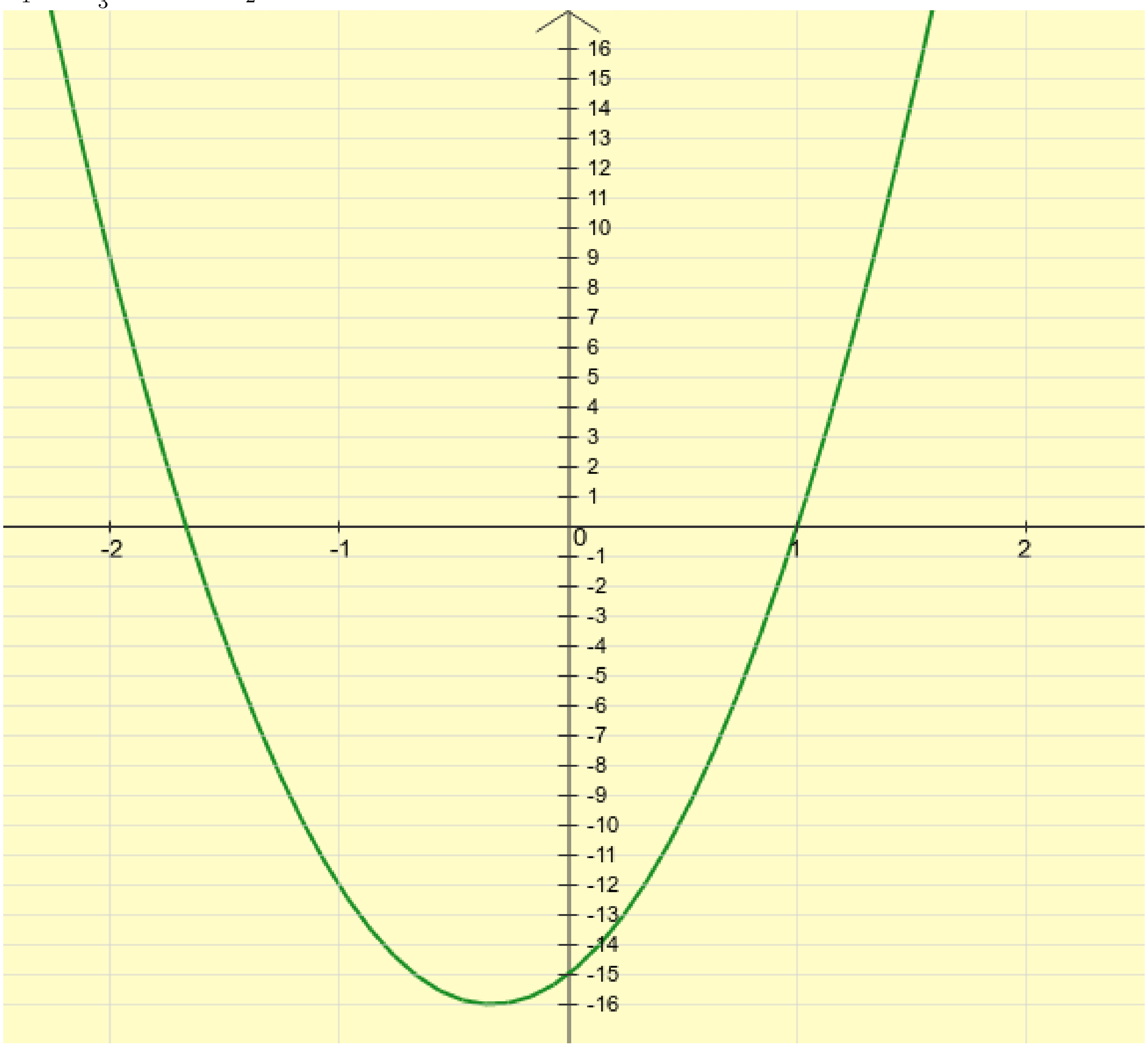
$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-15) = 36 + 36 \cdot 15 = 36 + 540 = 576$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{576} = 24$

$n_1 = \frac{-6-24}{2 \cdot 9} \qquad n_2 = \frac{-6+24}{2 \cdot 9}$

$n_1 = \frac{-30}{18} \qquad n_2 = \frac{18}{18}$

$n_1 = -\frac{5}{3} \qquad n_2 = 1$



Widzimy więc, że dla $n \in N$ i $n > 0$ warunek (1) jest spełniony a tym samym każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ korzystając z wzoru: $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$

$u_n = \frac{(3n)^2-\sqrt{9n^2+6n-15}^2}{3n+\sqrt{9n^2+6n-15}} = \frac{9n^2-9n^2-6n+15}{3n+\sqrt{9n^2+6n-15}} = \frac{-6n+15}{3n+\sqrt{9n^2+6n-15}}$

Podzielmy licznik i mianownik powyższego ułamka przez n:

$u_n = \frac{\frac{-6n}{n}+\frac{15}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{\sqrt{9n^2+6n-15}}{n}} = \frac{-6+\frac{15}{n}}{3+\sqrt{\frac{9n^2}{n^2}+\frac{6n}{n^2}-\frac{15}{n^2}}} = \frac{-6+\frac{15}{n}}{3+\sqrt{9+\frac{6}{n}-\frac{15}{n^2}}}$

Korzystając z twiedzeń 1, 2, 4 i 6 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-6+\frac{15}{n}}{3+\sqrt{9+\frac{6}{n}-\frac{15}{n^2}}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(-6)+\lim_{n\to\infty}\frac{15}{n}}{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\sqrt{9+\frac{6}{n}-\frac{15}{n^2}}} = \frac{-6+0}{3+\sqrt{\lim_{n\to\infty}9+\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{15}{n^2}}} =$

$= \frac{-6}{3+\sqrt{9+0-0}} = \frac{-6}{3+3} = \frac{-6}{6} = -1$

2.46

$u_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$

Najpierw zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ wyrażenie podpierwiastkwe jest zawsze dodatnie,

a więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy wyraz ogólny ciągu korzystając z wzoru:

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

$u_n = \frac{(\sqrt[3]{n^3+4n^2})^3-n^3}{(\sqrt[3]{n^3+4n^2})^2+\sqrt[3]{n^3+4n^2}\cdot n+n^2} = \frac{n^3+4n^2-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+4n^2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+4n^2)\cdot n^3}+n^2} = \frac{4n^2}{\sqrt[3]{(n^3+4n^2)^2}+\sqrt[3]{n^6+4n^5}+n^2}$

Podzielmy teraz licznik i mianownik przez n^2:

$u_n = \frac{\frac{4n^2}{n^2}}{\frac{\sqrt[3]{(n^3+4n^2)^2}}{n^2}+\frac{\sqrt[3]{n^6+4n^5}}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{\frac{(n^3+4n^2)^2}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{n^6+4n^5}{n^6}}+1} = \frac{4}{\sqrt[3]{\frac{(n^3+4n^2)^2}{(n^3)^2}}+\sqrt[3]{\frac{n^6}{n^6}+\frac{4n^5}{n^6}}+1} =$

$= \frac{4}{\sqrt[3]{(\frac{n^3+4n^2}{n^3})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{4}{n}}+1} = \frac{4}{\sqrt[3]{(1+\frac{4}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{4}{n}}+1} = \frac{4}{\sqrt[3]{1+2\cdot 1\cdot\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{4}{n}}+1} = \frac{4}{\sqrt[3]{1+\frac{8}{n}+\frac{16}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{4}{n}}+1}$

Korzystając z twierdzeń 1, 4 i 6 obliczamy granicę ciągu:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty}4}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{8}{n}+\frac{16}{n^2}}+\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{4}{n}}+\lim_{n\to\infty}1} =$

$= \frac{4}{\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^2}}+\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}}+1} = \frac{4}{\sqrt[3]{1+0+0}+\sqrt[3]{1+0}+1} = \frac{4}{1+1+1} = \frac{4}{3}$

2.47

$u_n = n\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}$

Zauważmy, że dla $n=1$ wyrażenie podpierwiastkowe jest równe 0, natomiast dla $n \in N$ i $n>1$

jest ono dodatnie. Zatem wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu korzystając z wzoru:

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

$u_n=\frac{(n\sqrt[3]{2})^3-(\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7})^3}{(n\sqrt[3]{2})^2+n\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}+(\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7})^2}=\frac{2n^3-2n^3-5n^2+7}{n^2\cdot\sqrt[3]{4}+n\cdot\sqrt[3]{4n^3+10n^2-14}+\sqrt[3]{(2n^3+5n^2-7)^2}}=$
$=\frac{-5n^2+7}{n^2\cdot\sqrt[3]{4}+n\cdot\sqrt[3]{4n^3+10n^2-14}+\sqrt[3]{(2n^3+5n^2-7)^2}}$

Podzielmy licznik i mianownik przez n^2:

$u_n=\frac{\frac{-5n^2}{n^2}+\frac{7}{n^2}}{\frac{n^2\cdot\sqrt[3]{4}}{n^2}+\frac{n\cdot\sqrt[3]{4n^3+10n^2-14}}{n^2}+\frac{\sqrt[3]{(2n^3+5n^2-7)^2}}{n^2}}=\frac{-5+\frac{7}{n^2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{4n^3+10n^2-14}{n^3}}+\sqrt[3]{\frac{(2n^3+5n^2-7)^2}{(n^3)^2}}}=$
$=\frac{-5+\frac{7}{n^2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4+\frac{10}{n}-\frac{14}{n^3}}+\sqrt[3]{(\frac{2n^3}{n^3}+\frac{5n^2}{n^3}-\frac{7}{n^3})^2}}=\frac{-5+\frac{7}{n^2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4+\frac{10}{n}-\frac{14}{n^3}}+\sqrt[3]{(2+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3})^2}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2, 3, 4 i 6 obliczamy granicę ciągu:

$\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{\lim_{n\to\infty}(-5)+\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{4}+\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{4+\frac{10}{n}-\frac{14}{n^3}}+\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(2+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3})^2}}=$
$=\frac{-5+0}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}4+\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{14}{n^3}}+\sqrt[3]{(\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^3})^2}}$
$=\frac{-5}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4+0-0}+\sqrt[3]{(2+0-0)^2}}=\frac{-5}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}=-\frac{5}{3\cdot\sqrt[3]{4}}$

2.48

$u_n=\frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$

Zauważmy najpierw, że dla $n\in N$ i $n\geq 1$ liczba 2^{2n} jest zawsze liczbą parzystą natomiast 7 jest liczbą nieparzystą. A więc mianownik powyższego ułamka jest zawsze różny od 0 a tym samym każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n=\frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}=\frac{4^n\div4-5}{(2^2)^n-7}=\frac{\frac{1}{4}\cdot4^n-5}{4^n-7}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{5}{4^n}}{1-\frac{7}{4^n}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2 i 4 obliczamy granicę ciągu:

$\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{4^n}}{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{7}{4^n}}=\frac{\frac{1}{4}-0}{1-0}=\frac{1}{4}$

2.49

$u_n=\frac{5\cdot3^{2n}-1}{4\cdot9^n+7}$

Zauważmy najpierw, że dla $n\in N$ i $n\geq 1$ mianownik ułamka jest zawsze większy od 0 a tym samym każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n=\frac{5\cdot3^{2n}-1}{4\cdot9^n+7}=\frac{5\cdot(3^2)^n-1}{4\cdot9^n+7}=\frac{5\cdot9^n-1}{4\cdot9^n+7}=\frac{5-\frac{1}{9^n}}{4+\frac{7}{9^n}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2 i 4 obliczamy granicę ciągu:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9^n}}{\lim_{n\to\infty} 4 + \lim_{n\to\infty} \frac{7}{9^n}} = \frac{5-0}{4+0} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

2.50

$u_n = \frac{3\cdot 2^{2n+2} - 10}{5\cdot 4^{n-1} + 3}$

Zauważmy najpierw, że dla $n \in N$ i $n \geq 1$ mianownik ułamka jest zawsze większy od 0 a tym samym każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n = \frac{3\cdot 2^{2n}\cdot 2^2 - 10}{5\cdot 4^n \div 4 + 3} = \frac{12\cdot (2^2)^n - 10}{\frac{5}{4}\cdot 4^n + 3} = \frac{12\cdot 4^n - 10}{\frac{5}{4}\cdot 4^n + 3} = \frac{12 - \frac{10}{4^n}}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4^n}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2 i 4 obliczamy granicę ciągu:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 12 - \lim_{n\to\infty} \frac{10}{4^n}}{\lim_{n\to\infty} \frac{5}{4} + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4^n}} = \frac{12-0}{\frac{5}{4}+0} = 12 \cdot \frac{4}{5} = \frac{48}{5}$

2.51

$u_n = \frac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$

Zauważmy najpierw, że dla $n \in N$ i $n \geq 1$ mianownik ułamka jest zawsze większy od 0 a tym samym każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n = \frac{-8^n \div 8}{7^n \cdot 7} = -\frac{8^n}{7^n \cdot 7 \cdot 8} = -\frac{1}{56} \cdot \frac{8^n}{7^n} = -\frac{1}{56} \cdot (\frac{8}{7})^n$

Korzystając z twierdzenia 3 obliczamy granicę ciągu:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{56}) \cdot \lim_{n\to\infty}(\frac{8}{7})^n = -\frac{1}{56} \cdot \infty = -\infty$

Czyli ciąg ten jest rozbieżny do $-\infty$.

2.52

$u_n = \frac{2^{n+1} - 3^{n+2}}{3^{n+2}}$

Zauważmy najpierw, że dla $n \in N$ i $n \geq 1$ mianownik ułamka jest zawsze większy od 0 a tym samym każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$:

$u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} - \frac{3^{n+2}}{3^{n+2}} = \frac{2^n \cdot 2}{3^n \cdot 3^2} - 1 = \frac{2}{9} \cdot (\frac{2}{3})^n - 1$

Korzystając z tw. 2, 3, 5 obliczamy granicę ciągu:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{9}\cdot(\frac{2}{3})^n) - \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{9}\cdot\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n - 1 = \frac{2}{9}\cdot 0 - 1 = -1$

2.53

$u_n = (\frac{3}{2})^n \cdot \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$

Zauważmy najpierw, że dla $n \in N$ i $n \geq 1$ mianownik drugiego ułamka jest większy od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$:

$u_n = \frac{3^n}{2^n}\cdot\frac{2^n\cdot 2-1}{3^n\cdot 3-1} = \frac{2-\frac{1}{2^n}}{3-\frac{1}{3^n}}$

Korzystając z twierdzeń 2 i 4 obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty}u_n = \frac{lim_{n\to\infty}2-lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{lim_{n\to\infty}3-lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$

2.54

$u_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}$

Wyrażenie podpierwiastkowe jest dla $n \in N$ i $n \geq 1$ zawsze większe od 0 a więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Ponadto zachodzi nierówność:

$3^n < 3^n + 2^n < 3^n + 3^n$

$\Updownarrow$

$\sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{3^n+2^n} < \sqrt[n]{3^n+3^n}$

$3 < \sqrt[n]{3^n+2^n} < \sqrt[n]{2\cdot 3^n}$

$3 < \sqrt[n]{3^n+2^n} < 3\cdot\sqrt[n]{2}$

Zatem wyrazy badanego ciągu $\{u_n\}$ są zawarte między odpowiednimi wyrazami ciągów

$a_n = 3$ i $b_n = 3\cdot\sqrt[n]{2}$

Korzstając z twierdzenia 3 i wzoru 1 obliczamy granice tych ciągów:

$lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}3 = 3$

$lim_{n\to\infty}b_n = lim_{n\to\infty}3\cdot\sqrt[n]{2} = lim_{n\to\infty}3\cdot lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 3\cdot 1 = 3$

Korzystając z twierdzenia 7 o trzech ciągach otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty}u_n = 3$

2.55

$u_n = \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n}$

Wyrażenie podpierwiastkowe jest dla $n \in N$ i $n \geq 1$ zawsze większe od 0 a więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Ponadto zachodzi nierówność:

$10^n < 10^n + 9^n + 8^n < 10^n + 10^n + 10^n$

$\Updownarrow$

$\sqrt[n]{10^n} < \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 10^n}$

$10 < \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n} < 10 \cdot \sqrt[n]{3}$

A więc wyrazy badanego ciągu $\{u_n\}$ są zawarte między odpowiednimi wyrazami ciągów $a_n = 10$ i $b_n = 10\sqrt[n]{3}$. Granice tych ciągów wynoszą (korzystamy z tw. 3 i wzoru 1):

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} 10 = 10$

$lim_{n\to\infty} b_n = lim_{n\to\infty}(10 \cdot \sqrt[n]{3}) = lim_{n\to\infty} 10 \cdot lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 10 \cdot 1 = 10$

Korzystając teraz z twierdzenia 7 o trzech ciągach otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty} u_n = 10$

2.56

$u_n = \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}$

Oba wyrażenia podpierwiastkowe są większe od 0 a więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Korzystając z tw. 2 i wzoru 1 mamy:

$lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}) = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^{100}} - lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}} = 1 - 1 = 0$

2.57

$u_n = \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n + (\frac{3}{4})^n}$

Wyrażenie podpierwiastkowe jest dla $n \in N$ i $n \geq 1$ dodatnie a więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika dostajemy:

$u_n = \sqrt[n]{(\frac{8}{12})^n + (\frac{9}{12})^n}$

Zachodzą następujące nierówności:

$(\frac{9}{12})^n < (\frac{8}{12})^n + (\frac{9}{12})^n < (\frac{9}{12})^n + (\frac{9}{12})^n$

$\Updownarrow$

$\sqrt[n]{(\frac{9}{12})^n} < \sqrt[n]{(\frac{8}{12})^n + (\frac{9}{12})^n} < \sqrt[n]{2 \cdot (\frac{9}{12})^n}$

$\frac{9}{12} < \sqrt[n]{(\frac{8}{12})^n + (\frac{9}{12})^n} < \frac{9}{12} \cdot \sqrt[n]{2}$

A więc wyrazy badanego ciągu $\{u_n\}$ są zawarte między odpowiednimi wyrazami ciągów $a_n = \frac{9}{12}$ i $b_n = \frac{9}{12}\sqrt[n]{2}$. Granice tych ciągów wynoszą (korzystamy z tw. 3 i wzoru 1):

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} \frac{9}{12} = \frac{9}{12}$

$lim_{n\to\infty} b_n = lim_{n\to\infty} (\frac{9}{12} \cdot \sqrt[n]{2}) = lim_{n\to\infty} \frac{9}{12} \cdot lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \frac{9}{12} \cdot 1 = \frac{9}{12}$

Korzystając teraz z twierdzenia 7 o trzech ciągach otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{9}{12}$

2.58

$u_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n \geq 1$ mianownik ułamka jest niezerowy, więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony. Skorzystajmy teraz z wzoru udowodnionego w zadaniu 1.59:

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Mamy więc:

$u_n = (1 + 2 + 3 + ... + n) \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1+\frac{n}{n^2}}{2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}$

Korzystając z tw, 1 i 4 obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty} 1 + lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{lim_{n\to\infty} 2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

2.59

$u_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$

Na początku zauważmy, że dla każdego $n \in N$ i $n \geq 1$ mianownik ułamka jest niezerowy, więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Skorzystajmy teraz z wzoru udowodnionego w zadaniu 1.56:

$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

$u_n = (1^2 + 2^2 + ... + n^2) \cdot \frac{1}{n^3} = (\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}) \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{n^3}{3n^3} + \frac{n^2}{2n^3} + \frac{n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$

Korzystając z twierdzenia 1 obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} + lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} + lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{3}$

2.60

$u_n = \frac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}$

Zauważmy najpierw, że dla każdego $n \in N$ i $n \geq 1$ mianownik ułamka jest niezerowy,

więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Skorzystajmy teraz z wzoru udowodnionego w zadaniu 1.62:

$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

$u_n = (1^3 + 2^3 + ... + n^3) \cdot \frac{1}{n^4} = (\frac{n(n+1)}{2})^2 \cdot (\frac{1}{n^2})^2 = (\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2})^2 = (\frac{n^2+n}{2n^2})^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4} = \frac{1+\frac{2n^3}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}}{4} =$
$= \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4}$

Korzystając z twierdzenia 1 i 4 obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty}u_n = \frac{lim_{n\to\infty}1+lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{lim_{n\to\infty}4} = \frac{1+0+0}{4} = \frac{1}{4}$

2.61

$u_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$

Zauważmy najpierw, że dla każdego $n \in N$ i $n \geq 1$ mianownik ułamka jest większy od 1, więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Następnie zauważmy, że licznik tego ułamka jest n-tą sumą cząstkową ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $q = \frac{1}{2}$. Podobnie mianownik tego ułamka jest n-tą sumą cząstkową ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $q = \frac{1}{3}$. W zadaniu 1.61 udowodniliśmy, że n-ta suma cząstkowa postępu geometrycznego wynosi:

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, dla $q \neq 1$

Zastosujmy ten wzór do naszego ułamka:

$u_n = \frac{1\cdot\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{\frac{1}{2}-1}}{1\cdot\frac{(\frac{1}{3})^n-1}{\frac{1}{3}-1}} = \frac{\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{-\frac{1}{2}}}{\frac{(\frac{1}{3})^n-1}{-\frac{2}{3}}} = \frac{-2\cdot[(\frac{1}{2})^n-1]}{-\frac{3}{2}\cdot[(\frac{1}{3})^n-1]} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^n-1}{(\frac{1}{3})^n-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}}$

Korzystając z tw. 2, 3 i 4 obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}\frac{4}{3} \cdot \frac{lim_{n\to\infty}1-lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{lim_{n\to\infty}1-lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1-0}{1-0} = \frac{4}{3}$

2.62

$u_n = \frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{4^n}}$

Zauważmy najpierw, że dla każdego $n \in N$ i $n \geq 1$ mianownik ułamka jest większy od 1, więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Następnie zauważmy, że licznik tego ułamka jest n-tą sumą cząstkową ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $q = a$. Podobnie mianownik tego ułamka jest n-tą sumą cząstkową ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $q = \frac{1}{4}$. W zadaniu 1.61 udowodniliśmy, że n-ta suma cząstkowa postępu geometrycznego wynosi:

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, dla $q \neq 1$

Zastosujmy ten wzór do mianownika ułamka i obliczmy granicę ciągu $\{u_n\}$ dla $a = 1$:

$u_n = \frac{1+1+1^2+...+1^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{4^n}} = \frac{n+1}{1\cdot\frac{(\frac{1}{4})^n-1}{\frac{1}{4}-1}} = \frac{n+1}{\frac{\frac{1}{4^n}-1}{-\frac{3}{4}}} = (n+1) \cdot \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4^n}-1} = (n+1) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4^n}}$

Korzystając z tw. 2, 3 i 4 dostajemy:

$lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty}(n+1) \cdot lim_{n\to\infty}\frac{3}{4} \cdot \frac{lim_{n\to\infty}1}{lim_{n\to\infty}1 - lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}} = \infty \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-0} = \infty$

A więc dla $a = 1$ ciąg jest rozbieżny do nieskończoności.

Zastosujmy teraz wzór na sumę cząstkową do licznika i mianownika ułamka ciągu $\{u_n\}$ dla $a \neq 1$:

$u_n = \frac{1\cdot\frac{a^n-1}{a-1}}{1\cdot\frac{(\frac{1}{4})^n-1}{\frac{1}{4}-1}} = \frac{\frac{a^n-1}{a-1}}{\frac{\frac{1}{4^n}-1}{-\frac{3}{4}}} = \frac{a^n-1}{a-1} \cdot \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4^n}-1} = \frac{1-a^n}{1-a} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4^n}}$

Korzystając z twierdzeń 2, 3 i 4 obliczamy granicę:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty}1 - lim_{n\to\infty}a^n}{lim_{n\to\infty}1 - lim_{n\to\infty}a} \cdot lim_{n\to\infty}\frac{3}{4} \cdot \frac{lim_{n\to\infty}1}{lim_{n\to\infty}1 - lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}} = \frac{1-lim_{n\to\infty}a^n}{1-a} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-0} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-lim_{n\to\infty}a^n}{1-a}$

Na podstawie twierdzenia 5 oraz warunku $a \neq 1$ otrzymujemy, że ciąg o wyrazie ogólnym a^n ma skończoną granicę dla dla $-1 < a < 1$ i wynosi ona 0, zatem granica ciągu $\{u_n\}$ wynosi:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-0}{1-a} = \frac{3}{4(1-a)}$

Podsumowując, ciąg $\{u_n\}$ jest ma skończoną granicę dla $-1 < a < 1$ i wynosi ona $\frac{3}{4(1-a)}$, natomiast dla $|a| \geq 1$ ciąg jest rozbieżny.

2.63

$u_n = \frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + ... + \frac{n}{n^k}$

Zauważmy najpierw, że dla każdego $n \in N$, $n \geq 1$ i $k \in C$ mianownik ułamków jest dodatni, więc każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Ponieważ wszystkie ułamki mają wspólny mianownik, więc wyraz ogólny ciągu możemy zapisać:

$u_n = \frac{1+2+...+n}{n^k}$

Skorzystajmy teraz z wzoru udowodnionego w zadaniu 1.59:

$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$u_n = \frac{1+2+...+n}{n^k} = \frac{1}{n^k} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2n^k}$

Dla $k = 0$ mamy:

$u_n = \frac{n^2+n}{2n^0} = \frac{n^2+n}{2 \cdot 1} = \frac{n^2+n}{2}$

$lim_{n\to\infty} u_n = \infty$

Dla $k = 1$ mamy:

$u_n = \frac{n^2+n}{2n^1} = \frac{n^2+n}{2n} = \frac{n+1}{2}$

$lim_{n\to\infty} u_n = \infty$

Dla $k = 2$ mamy:

$u_n = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 4 znajdujemy granicę:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty} 1 + lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{lim_{n\to\infty} 2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

Dla $k > 2$ mamy:

$u_n = \frac{n^2+n}{2n^k} = \frac{\frac{n^2}{n^k} + \frac{n}{n^k}}{2} = \frac{\frac{1}{n^{k-2}} + \frac{1}{n^{k-1}}}{2}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 4 znajdujemy granicę:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-2}} + lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}}}{lim_{n\to\infty} 2} = \frac{0+0}{2} = 0$

Dla $k < 0$ mamy:

$u_n = \frac{n^2+n}{2n^k} = \frac{(n^2+n) \cdot n^{-k}}{2}$

Ponieważ w rtym przypadku licznik wraz z wzrostem n rośnie nieograniczenie, więc:

$lim_{n\to\infty} u_n = \infty$

Podsumowując, dla $k < 2$ ciąg jest rozbieżny do plus nieskończoności, dla $k = 2$ granicą ciągu jest $\frac{1}{2}$ a dla $k > 2$ granicą ciągu jest 0.