Tw. 1.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ ma granicę a+b.

Tw. 2.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n - b_n\}$ ma granicę a-b.

Tw. 3.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n \cdot b_n\}$ ma granicę a·b.

Tw. 4.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a, ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, przy czym żaden z wyrazów ciągu $\{b_n\}$ nie równa się zeru, ani też jego granica b nie jest równa zeru, to ciąg $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ ma granicę $\frac{a}{b}$.

Tw. 5.

Ciąg o wyrazie ogólnym $u_n = q^n$ ma skończoną granicę tylko dla $-1 < q \leq 1$, przy czym:

a). Jeżeli $-1 < q < 1$, to $lim_{n\to\infty} q^n = 0$

b). Jeżeli $q = 1$, to $q^n = 1$, więc $lim_{n\to\infty} q^n = 1$

Tw. 6.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach nieujemnych ma granicę a, to ciąg $\{\sqrt[p]{a_n}\}$, gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną, ma granicę $\sqrt[p]{a}$.

Tw. 7. O trzech ciągach

Jeżeli wyrazy ogólne trzech ciągów $\{a_n\}$, $\{u_n\}$, $\{b_n\}$ spełniają dla $n \geq n_0$ nierówność:

$a_n \leq u_n \leq b_n$

i jeżeli ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mają wspólną granicę g, tzn:

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} b_n = g$

to ciąg $\{u_n\}$ ma tę samą granicę, czyli:

$lim_{n\to\infty} u_n = g$

Wzór 1:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, dla $a > 0$

Wzór 2:

$lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$, jeżeli $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i $a_n \neq 0$

Wzór 3:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Tw. 8.

$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$, jeżeli $a_n \geq 0$, $lim_{n\to\infty}a_n \neq 0$ oraz $lim_{n\to\infty}a_n \neq \infty$

Tw. 9.

Jeżeli dla ciągu $\{u_n\}$ istnieje granica

$lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = q < 1$

to $lim_{n\to\infty}u_n = 0$

2.64

$u_n = (1+\frac{2}{n})^n$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ mianownik ułamka jest różny od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ następująco:

$u_n = [(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^2$

Korzystając teraz z wzoru 2, gdzie $a_n = \frac{2}{n} \ \wedge \ lim_{n\to\infty} a_n = 0$ otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty}[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^2 = [lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^2 = e^2$

2.65

$u_n = (1-\frac{1}{n^2})^n$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ mianownik ułamka jest różny od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ następująco:

$u_n = (1-\frac{1}{n^2})^n = [(1-\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n})]^n = (1-\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n})^n = \{[1+(-\frac{1}{n})]^{-n}\}^{-1} \cdot (1+\frac{1}{n})^n$

Korzystając teraz z twierdzenia 3 i wzoru 2 obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty}\{[1+(-\frac{1}{n})]^{-n}\}^{-1} \cdot lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \{lim_{n\to\infty}[1+(-\frac{1}{n})]^{-n}\}^{-1} \cdot lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

$= e^{-1} \cdot e = \frac{e}{e} = 1$

2.66

$u_n = (\frac{n+5}{n})^n$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ mianownik ułamka jest różny od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ następująco:

$u_n = (\frac{n+5}{n})^n = (1+\frac{5}{n})^n = [(1+\frac{5}{n})^{\frac{n}{5}}]^5$

Korzystając teraz z wzoru 2, gdzie $a_n = \frac{5}{n} \ \wedge \ lim_{n\to\infty} a_n = 0$ otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}[(1+\frac{5}{n})^{\frac{n}{5}}]^5 = [lim_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})^{\frac{n}{5}}]^5 = e^5$

2.67

$u_n = (1-\frac{3}{n})^n$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ mianownik ułamka jest różny od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ następująco:

$u_n = (1-\frac{3}{n})^n = \{[1+(-\frac{3}{n})]^{-\frac{n}{3}}\}^{-3}$

Korzystając teraz z wzoru 2, gdzie $a_n = -\frac{3}{n} \ \wedge \ lim_{n\to\infty}a_n = 0$ obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}\{[1+(-\frac{3}{n})]^{-\frac{n}{3}}\}^{-3} = \{lim_{n\to\infty}[1+(-\frac{3}{n})]^{-\frac{n}{3}}\}^{-3} = e^{-3}$

*w książce jest błędna odpowiedź

2.68

$u_n = (1-\frac{4}{n})^{-n+3}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ mianownik ułamka jest różny od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ następująco:

$u_n = (1-\frac{4}{n})^{-n+3} = (1-\frac{4}{n})^{-n} \cdot (1-\frac{4}{n})^3 = \{[1+(-\frac{4}{n})]^{-\frac{n}{4}}\}^4 \cdot (1-\frac{4}{n})^3$

Korzystając teraz z tw. 2, 3 i wzoru 2, gdzie $a_n = -\frac{4}{n} \ \wedge \ lim_{n\to\infty}a_n = 0$ obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}\{[1+(-\frac{4}{n})]^{-\frac{n}{4}}\}^4 \cdot lim_{n\to\infty}(1-\frac{4}{n})^3 = \{lim_{n\to\infty}[1+(-\frac{4}{n})]^{-\frac{n}{4}}\}^4 \cdot$

$\cdot (lim_{n\to\infty}1 - lim_{n\to\infty}\frac{4}{n})^3 = e^4 \cdot (1-0)^3 = e^4$

2.69

$u_n = (\frac{n^2+6}{n^2})^{n^2}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ mianownik ułamka jest różny od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ następująco:

$u_n = (\frac{n^2+6}{n^2})^{n^2} = (1 - \frac{6}{n^2})^{n^2} = [(1 + \frac{6}{n^2})^{\frac{n^2}{6}}]^6$

Korzystając teraz z wzoru 2, gdzie $a_n = \frac{6}{n^2} \ \wedge \ lim_{n\to\infty} a_n = 0$ obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty}[(1 + \frac{6}{n^2})^{\frac{n^2}{6}}]^6 = [lim_{n\to\infty}(1 + \frac{6}{n^2})^{\frac{n^2}{6}}]^6 = e^6$

2.70

$u_n = (\frac{n^2+2}{2n^2+1})^{n^2}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ mianownik ułamka jest różny od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$:

$u_n = (\frac{n^2+2}{2n^2+1})^{n^2} = (\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}})^{n^2} = \frac{(1+\frac{2}{n^2})^{n^2}}{(2+\frac{1}{n^2})^{n^2}} = \frac{(1+\frac{2}{n^2})^{n^2}}{[2\cdot(1+\frac{1}{2n^2})]^{n^2}} = \frac{(1+\frac{2}{n^2})^{n^2}}{2^{n^2}\cdot(1+\frac{1}{2n^2})^{n^2}}$

Korzystając teraz z wzoru 2 oraz tw. 3 obliczamy granicę licznika i mianownika:

$lim_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n^2})^{n^2} = lim_{n\to\infty}[(1 + \frac{2}{n^2})^{\frac{n^2}{2}}]^2 = e^2$

$lim_{n\to\infty}[2^{n^2} \cdot (1 + \frac{1}{2n^2})^{n^2}] = lim_{n\to\infty}2^{n^2} \cdot lim_{n\to\infty}[(1 + \frac{1}{2n^2})^{2n^2}]^{\frac{1}{2}} = lim_{n\to\infty}2^{n^2} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \infty \cdot e^{\frac{1}{2}} = \infty$

Zatem ostatecznie granica ciągu $\{u_n\}$ wynosi:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{e^2}{\infty} = 0$

* w książce jest błędna odpowiedź

2.71

$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ wszystkie wyrażenia podpierwiastkowe są nieujemne (bo $n > \sqrt{n}$), zatem wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ korzystając z wzoru $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$:

$u_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}^2 - \sqrt{n-\sqrt{n}}^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{n+\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}}+\sqrt{\frac{n-\sqrt{n}}{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n}}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{n}{n^2}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{n}{n^2}}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2, 4 i 6 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty}2}{lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{2}{\sqrt{lim_{n\to\infty}1+lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{lim_{n\to\infty}1-lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = 1$

2.72

$u_n = \sqrt{n(n - \sqrt{n^2-1}}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ zachodzi $n^2 - 1 \geq 0$ oraz $\sqrt{n^2-1} < n$ a zatem $n - \sqrt{n^2-1} > 0$ oraz całe wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne. Tym samym wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ korzystając z wzoru $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$:

$u_n = \sqrt{n \cdot \frac{n^2 - \sqrt{n^2-1}^2}{n+\sqrt{n^2-1}}} = \sqrt{n \cdot \frac{n^2-n^2+1}{n+\sqrt{n^2-1}}} = \sqrt{n \cdot \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}} = \sqrt{\frac{n}{n+\sqrt{n^2-1}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2, 4, 6 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}} = \sqrt{\frac{lim_{n\to\infty}1}{lim_{n\to\infty}1 + lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{lim_{n\to\infty}1 - lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}} =$
$= \sqrt{\frac{1}{1+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

2.73

$u_n = n \cdot (\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2-1})$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ oba wyrażenia podpierwiastkowe są nieujemne, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$ korzystając z wzoru $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$:

$u_n = n \cdot \frac{\sqrt{2n^2+1}^2 - \sqrt{2n^2-1}^2}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}} = n \cdot \frac{2n^2+1-2n^2+1}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}} = \frac{2n}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2n^2+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2n^2-1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}$

Korzystając z twierdzeń 1, 2, 4, 6 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty}2}{\sqrt{lim_{n\to\infty}2 + lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} + \sqrt{lim_{n\to\infty}2 - lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

2.74

$u_n = \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 15}$

Zbadajmy najpierw dla jakich $n \in N$ i $n > 0$ wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne.

W tym celu przekształćmy je do następującej postaci:

$2n^3 - 3n^2 + 15 = n^2(2n-3) + 15$

Widzimy,że dla $n \in N$ i $n>1$ wyrażenie $2n-3$ jest większe od 0 a więc całe wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne. Natomiast dla $n=1$ mamy:

$1^2 \cdot (2 \cdot 1 - 3) + 15 = 1 \cdot (2-3) + 15 = -1 + 15 = 14$

a zatem wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne.

Ostatecznie dla każdego $n \in N$ i $n>0$ wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne, a tym samym wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$:

$$u_n = \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 15} = \sqrt[n]{2n^3(1 - \frac{3n^2}{2n^3} + \frac{15}{2n^3})} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{3}{2n} + \frac{15}{2n^3}} =$$
$$= \sqrt[n]{2} \cdot (\sqrt[n]{n})^3 \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{3}{2n} + \frac{15}{2n^3}}$$

Zastosujmy teraz twierdzenie 3 oraz wzory 1 i 3 do obliczenia granicy ciągu $\{u_n\}$:

$$lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^3 \cdot lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{3}{2n} + \frac{15}{2n^3}} = 1 \cdot 1^3 \cdot lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{3}{2n} + \frac{15}{2n^3}} =$$
$$= lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{3}{2n} + \frac{15}{2n^3}}$$

Stosując teraz twierdzenie 8 do powyższego wyrażenia otrzymujemy szukaną granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{3}{2n} + \frac{15}{2n^3}} = 1$, bo $lim_{n\to\infty} a_n = 1$,gdzie $a_n = 1 - \frac{3}{2n} + \frac{15}{2n^3}$

2.75

$u_n = \sqrt{n^{10} - 2n^2 + 2}$

Zbadajmy najpierw dla jakich $n \in N$ i $n>0$ wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne.

W tym celu przekształćmy je do następującej postaci:

$n^{10} - 2n^2 + 2 = n^2(n^8 - 2) + 2$

Dla $n = 1$ mamy: $n^2(n^8-2)+2 = 1^2 \cdot (1^8 - 2) + 2 = (1-2) + 2 = -1 + 2 = 1 > 0$. Widzimy też, że dla

$n \geq 2$ wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne. Ostatecznie dla każdego $n \in N$ i $n>0$ wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne, a tym samym wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$:

$$u_n = \sqrt{n^{10} - 2n^2 + 2} = \sqrt{n^{10} \cdot (1 - \frac{2n^2}{n^{10}} + \frac{2}{n^{10}})} = n^5 \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{n^8} + \frac{2}{n^{10}}}$$

Stosując twierdzenia 3 i 8 obliczamy granicę ciągu:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}n^5 \cdot lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{n^8}+\frac{2}{n^{10}}} = \infty \cdot 1 = \infty$

W książce jest błędna odpowiedź.

2.76

$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ każde wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne oraz mianownik ułamka jest niezerowy, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$:

$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\cdot\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^4}}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}}}$

Korzystając teraz z twierdzeń 1, 4 i 6 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty}u_n = \frac{lim_{n\to\infty}1}{\sqrt{lim_{n\to\infty}1+\sqrt{lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\sqrt{lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = 1$

2.77

$u_n = \frac{1}{2n}\cdot cosn^3 - \frac{3n}{6n+1}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ mianowniki obu ułamków są niezerowe, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu $\{u_n\}$:

$u_n = \frac{1}{2n}\cdot cosn^3 - \frac{3}{6+\frac{1}{n}}$

Ponieważ $cosn^3 \in [-1;1]$ więc $lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot cosn^3 = 0$.

Zatem korzystając z twierdzeń 1, 2, 4 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty}u_n = 0 - \frac{lim_{n\to\infty}3}{lim_{n\to\infty}6+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = -\frac{3}{6+0} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

2.78

$u_n = 2^{-n}\cdot a \cdot cosn\pi$

Przekształćmy teraz nieco powyższy wzór:

$u_n = \frac{a}{2^n} \cdot cosn\pi$

Widzimy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ mianownik ułamka jest niezerowy, a tym samym wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Ponieważ $cosn\pi \in \{-1; 1\}$ (dla kolejnych liczb naturalnych przyjmuje naprzemiennie wartości 1,-1,1,-1,1,-1,...), natomiast dla dowolnego a granica $lim_{n\to\infty} \frac{a}{2^n} = 0$, więc ostateznie granica ciągu $\{u_n\}$ wynosi:

$lim_{n\to\infty} u_n = 0$

2.79

$u_n = \frac{n \cdot sinn!}{n^2+1}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ mianownik ułamka jest niezerowy, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n = \frac{\frac{n}{n^2} \cdot sinn!}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot sinn!}{1 + \frac{1}{n^2}}$

Ponieważ $sinn! \in [-1; 1]$, więc w powyższym wzorze możemy podstawić $sinn! = a_n \in [-1, 1]$. Mamy więc:

$u_n = \frac{\frac{1}{n} \cdot a_n}{1 + \frac{1}{n^2}}$

Korzystając teraz z tw. 1, 3 i 4 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{n})}{lim_{n\to\infty} 1 + lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$

2.80

$u_n = (sinn!) \cdot \frac{n}{n^2+1} + \frac{2n}{3n+1} \cdot \frac{n}{1-3n}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ mianowniki wszystkich trzech ułamków są niezerowe, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n = (sinn!) \cdot \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} + \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{n}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{3n}{n}} = (sinn!) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{2}{3+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}-3}$

Ponieważ $sinn! \in [-1;1]$, więc w powyższym wzorze możemy podstawić $sinn! = a_n \in [-1,1]$.

Mamy więc:

$u_n = \frac{\frac{a_n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{2}{3+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}-3}$

Korzystając teraz z tw. 1, 2, 3 i 4 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty} u_n = \frac{lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}}{lim_{n\to\infty}1+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} + \frac{lim_{n\to\infty}2}{lim_{n\to\infty}3+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \cdot \frac{lim_{n\to\infty}1}{lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-lim_{n\to\infty}3} = \frac{0}{1+0} + \frac{2}{3+0} \cdot \frac{1}{0-3} = \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{9}$

2.81

$u_n = \frac{2n}{2n^2-1} \cdot cos\frac{n+1}{2n-1} - \frac{n}{1-2n} \cdot \frac{n\cdot(-1)^n}{n^2+1}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ mianowniki wszystkich czterech ułamków są niezerowe, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n = \frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}} \cdot cos\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}} - \frac{\frac{n}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{2n}{n}} \cdot \frac{\frac{n}{n^2}\cdot(-1)^n}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n^2}} \cdot cos\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n}-2} \cdot \frac{\frac{1}{n}\cdot(-1)^n}{1+\frac{1}{n^2}}$

Korzystając z tw. 1, 2, 3 i 4 obliczamy granice poszczególnych podwyrażeń:

$lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n^2}} = \frac{lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{lim_{n\to\infty}2-lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{2-0} = 0$

$lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{lim_{n\to\infty}1+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{lim_{n\to\infty}2-lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$

$lim_{n\to\infty}cos\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = cos\frac{1}{2}$

$lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}-2} = \frac{lim_{n\to\infty}1}{lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-lim_{n\to\infty}2} = \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

$lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\cdot(-1)^n}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}}{lim_{n\to\infty}1+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$

Zatem ostatecznie granicą ciągu $\{u_n\}$ jest:

$lim_{n\to\infty} u_n = 0 \cdot cos\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) \cdot 0 = 0 - 0 = 0$

2.82

$u_n = n \cdot (ln(n+1) - lnn)$

Dla $n \in N$ i $n>0$ oba logarytmy są określone, więc także wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu korzystając z wzorów $lna - lnb = ln\frac{a}{b}$ oraz $n \cdot lna = lna^n$:

$u_n = n \cdot ln\frac{n+1}{n} = ln(\frac{n+1}{n})^n = ln(1+\frac{1}{n})^n$

Na podstawie wzoru 2 mamy:

$lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

Zatem granica ciągu $\{u_n\}$ wynosi:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}ln(1+\frac{1}{n})^n = ln(lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n) = lne = log_e e = 1$

2.83

$u_n = \frac{ln(1+\frac{3}{n})}{\frac{1}{n}}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>0$ zarówno logarytm naturalny jest określony, jak i mianowniki ułamków są różne od 0. A więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu korzystając z wzoru $n \cdot lna = lna^n$:

$u_n = \frac{ln(1+\frac{3}{n})}{\frac{1}{n}} = n \cdot ln(1+\frac{3}{n}) = ln(1+\frac{3}{n})^n = ln((1+\frac{3}{n})^{\frac{n}{3}})^3$

Korzystając z wzoru 2 obliczamy granicę ciągu $\{u_n\}$:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}ln((1+\frac{3}{n})^{\frac{n}{3}})^3 = ln((lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^{\frac{n}{3}})^3 = lne^3 = 3 \cdot lne = 3 \cdot 1 = 3$

2.84

$u_n = \frac{log_2 n^5}{log_8 n}$

Dla $n \in N$ i $n>0$ zarówno mianowik ułamka jest różny od 0 jak i oba logarytmy są określone, więc tym samym określone są wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu korzystając z wzoru $log_a b = \frac{log_A b}{log_A a}$:

$u_n = log_2 n^5 \cdot \frac{1}{\frac{log_2 n}{log_2 8}} = log_2 n^5 \cdot \frac{log_2 8}{log_2 n} = \frac{log_2 n^5}{log_2 n} \cdot 3$

Następnie skorzystajmy z wzoru $log_a b^r = r \cdot log_a b$:

$u_n = \frac{5 \cdot log_2 n}{log_2 n} \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$

A więc granica ciągu $\{u_n\}$ wynosi:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}15 = 15$

2.85

$u_n = \frac{9^{log_3 n}}{4^{log_2 n}}$

Dla $n \in N$ i $n>0$ oba logarytmy są określone oraz mianownik ułamka jest różny od 0. Zatem wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n = \frac{9^{log_3 n}}{4^{log_2 n}} = \frac{(3^2)^{log_3 n}}{(2^2)^{log_2 n}} = \frac{(3^{log_3 n})^2}{(2^{log_2 n})^2}$

Korzystając z definicji logarytmu mamy:

$log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$

A z tego wynika, że:

$a^{log_a b} = b$

$u_n = \frac{(3^{log_3 n})^2}{(2^{log_2 n})^2} = \frac{n^2}{n^2} = 1$

A więc granica ciągu wynosi:

$lim_{n\to\infty}u_n = 1$

2.86

$u_n = \frac{8^{log_2 n}}{2^n}$

Dla $n \in N$ i $n>0$ logarytm jest określony oraz mianownik ułamka jest różny od 0. Zatem wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Korzystając z definicji logarytmu mamy:

$log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$

A z tego wynika, że:

$a^{log_a b} = b$

Przekształćmy teraz ogólny wyraz ciągu:

$u_n = \frac{8^{log_2 n}}{2^n} = \frac{(2^3)^{log_2 n}}{2^n} = \frac{(2^{log_2 n})^3}{2^n} = \frac{n^3}{2^n}$

Mamy:

$u_n = \frac{n^3}{2^n}$ oraz $u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$

Dla $n \in N$ i $n > 0$ zachodzi:

$|u_n| = u_n$ oraz $|u_{n+1}| = u_{n+1}$

Korzystając z twierdzeń 1 i 3 obliczmy granicę ciągu $|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$:

$lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = lim_{n\to\infty}(\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^3}) = lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{2n^3} =$
$= lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot(\frac{n+1}{n})^3) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^3 = \frac{1}{2}\cdot(lim_{n\to\infty}1 + lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})^3 = \frac{1}{2}\cdot(1+0)^3 = \frac{1}{2}$

Zatem na podstawie twierdzenia 9 granica ciągu $\{u_n\}$ wynosi:

$lim_{n\to\infty}u_n = 0$

2.87

$u_n = \frac{27^{log_3 n}}{16^{log_2 n}}$

Dla $n \in N$ i $n > 0$ oba logarytmy są określone oraz mianownik ułamka jest różny od 0 a tym samym każdy wyraz ciągu $\{u_n\}$ jest określony.

Przekształćmy wyraz ogólny ciągu:

$u_n = \frac{27^{log_3 n}}{16^{log_2 n}} = \frac{(3^3)^{log_3 n}}{(2^4)^{log_2 n}} = \frac{(3^{log_3 n})^3}{(2^{log_2 n})^4}$

Korzystając z definicji logarytmu mamy:

$log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$

A z tego wynika, że:

$a^{log_a b} = b$

Czyli wyraz ogólny przybiera postać:

$u_n = \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$

Zatem granica ciągu $\{u_n\}$ wynosi:

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

2.88

$u_n = \frac{n!}{n^n}$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ mianownik ułamka jest różny od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy wyraz ogólny ciągu:

$$u_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n} \begin{cases} = \frac{1}{n} & dla\, n \in \{1, 2\} \\ < \frac{1}{n} & dla\, n \in N \wedge n > 2 \end{cases}$$

Czyli mamy:

$0 < u_n \leq \frac{1}{n}$

Korzystając teraz z twierdzenia 7 o trzech ciągach otrzymujemy:

$lim_{n \to \infty} 0 = 0 \qquad \wedge \qquad lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Downarrow tw.7$

$lim_{n \to \infty} u_n = 0$

2.89

$u_n = \frac{2^n \cdot 3^{2n}}{n!}$

Mianownik powyższego ułamka jest dla $n \in N$ i $n > 0$ różny od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$ są określone.

Przekształćmy wyraz ogólny ciągu:

$u_n = \frac{2^n \cdot 3^{2n}}{n!} = \frac{2^n \cdot 3^n \cdot 3^n}{n!} = \frac{6^n \cdot 3^n}{n!} = \frac{18^n}{n!}$

Zbadajmy teraz jaką granicę ma ciąg $|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$:

$lim_{n \to \infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = lim_{n \to \infty} \frac{|\frac{18^{n+1}}{(n+1)!}|}{|\frac{18^n}{n!}|} = lim_{n \to \infty} (\frac{18^n \cdot 18}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{18^n}) = lim_{n \to \infty} \frac{18}{n+1} = 0$

Zatem zgodnie z tw. 9 ciąg $\{u_n\}$ ma granicę:

$lim_{n \to \infty} u_n = 0$

2.90

$u_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2})...(1 - \frac{1}{n^2})$

Zauważmy, że dla $n \in N$ i $n>$ 1 mianowniki wszystkich ułamków są różne od 0, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{u_n\}$, oprócz pierwszego u_1 są określone.

Przekształćmy teraz wyraz ogólny ciągu:

$$u_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2})...(1 - \frac{1}{n^2}) = (\frac{2^2-1}{2^2})(\frac{3^2-1}{3^2})(\frac{4^2-1}{4^2})...(\frac{n^2-1}{n^2}) =$$
$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3} \cdot \frac{(4-1)(4+1)}{4\cdot 4} \cdot ... \cdot \frac{(n-1)n+1)}{n\cdot n} = \frac{2-1}{2} \cdot \frac{2+1}{2} \cdot \frac{3-1}{3} \cdot \frac{3+1}{3} \cdot \frac{4-1}{4} \cdot \frac{4+1}{4} \cdot ... \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot ... \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

Korzystając teraz z tw. 1 i 3, obliczamy granicę ciągu:

$$lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{2} \cdot lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \cdot (lim_{n\to\infty} 1 + lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \cdot (1+0) = \frac{1}{2}$$