Tw. 1.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ ma granicę a+b.

Tw. 2.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n - b_n\}$ ma granicę a-b.

Tw. 3.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n \cdot b_n\}$ ma granicę a·b.

Tw. 4.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a, ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, przy czym żaden z wyrazów ciągu $\{b_n\}$ nie równa się zeru, ani też jego granica b nie jest równa zeru, to ciąg $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ ma granicę $\frac{a}{b}$.

Tw. 5.

Ciąg o wyrazie ogólnym $u_n = q^n$ ma skończoną granicę tylko dla $-1 < q \leq 1$, przy czym:

a). Jeżeli $-1 < q < 1$, to $lim_{n\to\infty} q^n = 0$

b). Jeżeli $q = 1$, to $q^n = 1$, więc $lim_{n\to\infty} q^n = 1$

Tw. 6.

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach nieujemnych ma granicę a, to ciąg $\{\sqrt[p]{a_n}\}$, gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną, ma granicę $\sqrt[p]{a}$.

Tw. 7. O trzech ciągach

Jeżeli wyrazy ogólne trzech ciągów $\{a_n\}$, $\{u_n\}$, $\{b_n\}$ spełniają dla $n \geq n_0$ nierówność:

$a_n \leq u_n \leq b_n$

i jeżeli ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mają wspólną granicę g, tzn:

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} b_n = g$

to ciąg $\{u_n\}$ ma tę samą granicę, czyli:

$lim_{n\to\infty} u_n = g$

Wzór 1:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, dla $a > 0$

Wzór 2:

$lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$, jeżeli $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i $a_n \neq 0$

Wzór 3:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Tw. 8.

$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$, jeżeli $a_n \geq 0$, $lim_{n\to\infty}a_n \neq 0$ oraz $lim_{n\to\infty}a_n \neq \infty$

Tw. 9.

Jeżeli dla ciągu $\{u_n\}$ istnieje granica

$lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = q < 1$

to $lim_{n\to\infty}u_n = 0$

2.91

Udowodnić: $\sqrt[n]{|u_n|} \to q < 1 \quad \Rightarrow \quad u_n \to 0$

Najpierw zauważmy, że dla $n \in N$ i $n > 0$ wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne, więc wszystkie wyrazy ciągu $\{\sqrt[n]{|u_n|}\}$ są określone. Na podstawie definicji granicy mamy:

$|\sqrt[n]{|u_n|}| \leq q + \varepsilon$

$\sqrt[n]{|u_n|} \leq q + \varepsilon$

$|u_n| \leq (q + \varepsilon)^n$

Weźmy ε tak małe, że $q + \varepsilon < 1$, wtedy:

$|u_n| \leq (q + \varepsilon)^n < 1$

Na podstawie tw. 5 mamy

$lim_{n\to\infty}(q + \varepsilon)^n = 0$

Ponieważ ciąg $|u_n|$ jest ograniczony z dołu przez liczbę 0, to zachodzi:

$0 \leq |u_n| \leq (q + \varepsilon)^n < 1$

Stosując teraz tw. 7 o trzech ciągach, otrzymujemy: $lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$

Zachodzi oczywista nierówność:

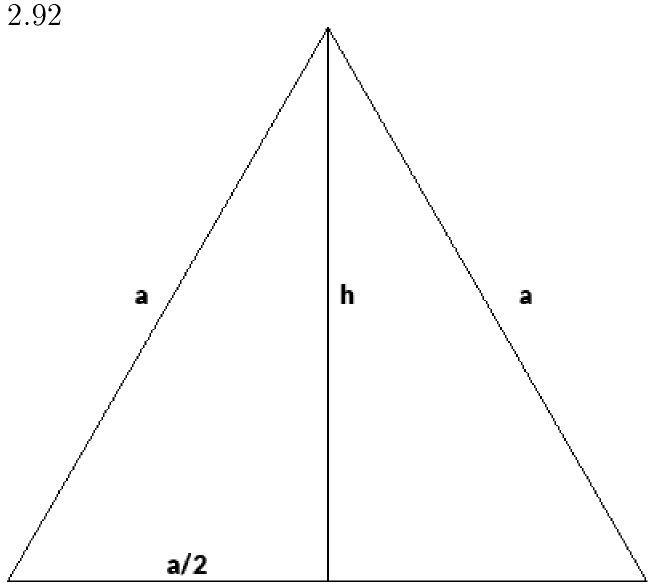
$-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$

Zatem stosując ponownie tw. 7 o trzech ciągach dostajemy ostatecznie:

$lim_{n\to\infty}u_n = 0$

c.n.d.

2.92



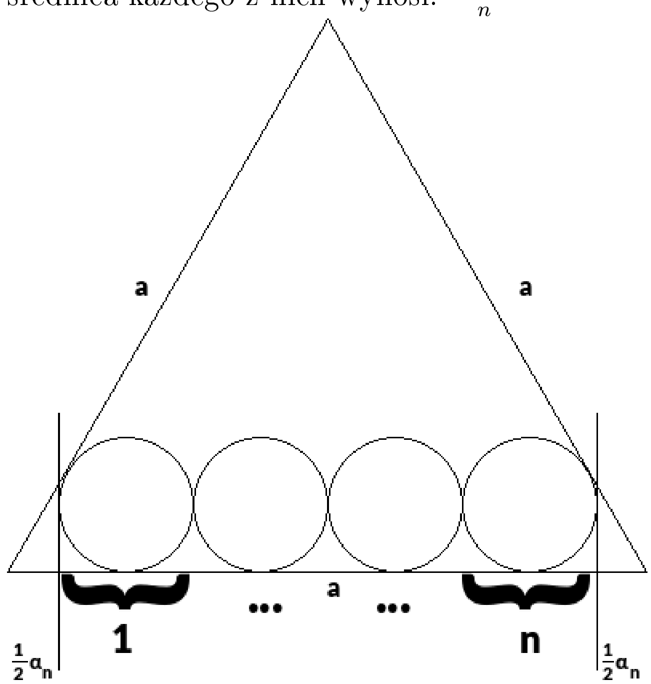
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy, że wysokość trójkąta równobocznego wynosi:

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Zatem pole trójkąta wynosi:

$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Załóżmy, że przy podstawie trójkąta leży n trójkątów. Jak widzimy na poniższym rysunku średnica każdego z nich wynosi: $\frac{a-\alpha_n}{n}$



Przy $n \to \infty$ $\alpha_n \to 0$.

Poziom wyżej nad tymi kołami leży $n - 1$ identycznych kół i tak dalej aż do najwyższego poziomu, gdzie leży tylko jedno koło. Zatem wszystkich kół jest:

$k_n = n + (n-1) + (n-2) + ... + 1$

Pole każdego koła wynosi:

$S_{k_n} = \pi \cdot (\frac{a-\alpha_n}{2n})^2 = \frac{(a-\alpha_n)^2\pi}{4n^2}$

Natomiast pole wszystkich kół wynosi:

$S_{k_n} = \frac{(a-\alpha_n)^2}{4n^2} \cdot \pi \cdot (n + (n-1) + ... + 1) = \frac{(a-\alpha_n)^2}{4n^2} \cdot \pi \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(a-\alpha_n)^2(n+1)}{8n} \cdot \pi$

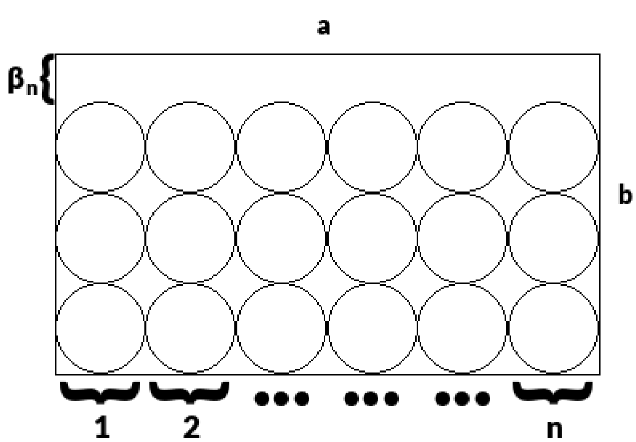
A stosunek $\frac{S_{k_n}}{S}$ wynosi:

$\frac{S_{k_n}}{S} = \frac{(a-\alpha_n)^2(n+1)}{8n} \cdot \pi \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{3}} = \frac{(a-\alpha_n)^2(n+1)\pi}{2\sqrt{3}\cdot n\cdot a^2}$

Obliczmy granicę ciągu $\{\frac{S_{k_n}}{S}\}$:

$lim_{n\to\infty}\frac{S_{k_n}}{S} = lim_{n\to\infty}\frac{(a-\alpha_n)^2(n+1)\pi}{2\sqrt{3}\cdot n\cdot a^2} = lim_{n\to\infty}\frac{(a-\alpha_n)^2(1+\frac{1}{n})\pi}{2\sqrt{3}\cdot a^2} = \frac{lim_{n\to\infty}((a-\alpha_n)^2(1+\frac{1}{n})\pi)}{lim_{n\to\infty}(2\sqrt{3}\cdot a^2)} =$
$= \frac{(lim_{n\to\infty}a - lim_{n\to\infty}\alpha_n)^2(lim_{n\to\infty}1 + lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})lim_{n\to\infty}\pi}{2\sqrt{3}\cdot a^2} = \frac{(a-0)^2(1+0)\pi}{2\sqrt{3}\cdot a^2} = \frac{a^2\pi}{2\sqrt{3}\cdot a^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

2.93



Wzdłuż boku a leży n okręgów, każdy o średnicy $\frac{a}{n}$ i promieniu $\frac{a}{2n}$. Wzdłuż boku b leży $\frac{b-\beta_n}{\frac{a}{n}} = \frac{n(b-\beta_n)}{a}$ okręgów, gdzie β_n jest długością, która należy do przedziału $< 0, \frac{a}{n})$ w zależności od wymiarów prostokąta. $\beta_n \to 0$ gdy $n \to \infty$. Pole pojedyńczego koła wynosi:

$S_K = \pi \cdot (\frac{a}{2n})^2 = \frac{\pi a^2}{4n^2}$

Pole prostokąta wynosi:

$S_P = ab$

Łączne pole wszystkich kół wpisanych w prostokąt wynosi:

$S_{K_n} = n \cdot \frac{n(b-\beta_n)}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4n^2} = \frac{\pi a(b-\beta_n)}{4}$

Zatem szukana granica wynosi:

$lim_{n\to\infty}\frac{S_{k_n}}{S_P} = lim_{n\to\infty}\frac{\pi a(b-\beta_n)}{4}\cdot\frac{1}{ab} = lim_{n\to\infty}\frac{\pi(b-\beta_n)}{4b} = \frac{lim_{n\to\infty}\pi\cdot(lim_{n\to\infty}b - lim_{n\to\infty}\beta_n)}{lim_{n\to\infty}4b} =$
$\frac{\pi\cdot(b-0)}{4b} = \frac{\pi b}{4b} = \frac{1}{4}\pi$

2.94

Trójkątów jest $n-2$. Każdy z nich ma bok o długości $\frac{d}{n}$ oraz wysokość $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{d}{n} = \frac{d\sqrt{3}}{2n}$.

Pole trójkąta wynosi:

$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{n}\cdot\frac{d\sqrt{3}}{2n} = \frac{d^2\sqrt{3}}{4n^2}$

Obwód trójkąta wynosi:

$O = 3\cdot\frac{d}{n} = \frac{3d}{n}$

Pole całej figury wynosi:

$S_n = (n-2)\cdot\frac{d^2\sqrt{3}}{4n^2} = \frac{nd^2\sqrt{3}}{4n^2} - \frac{2d^2\sqrt{3}}{4n^2} = \frac{d^2\sqrt{3}}{4n} - \frac{d^2\sqrt{3}}{2n^2}$

Obwód całej figury wynosi:

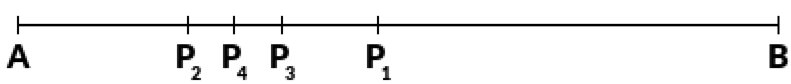
$O_n = (n-2)\cdot\frac{3d}{n} = \frac{n\cdot 3d}{n} - \frac{2\cdot 3d}{n} = 3d - \frac{6d}{n}$

Zatem szukane granice wynoszą:

$lim_{n\to\infty}S_n = lim_{n\to\infty}\frac{d^2\sqrt{3}}{4n} - lim_{n\to\infty}\frac{d^2\sqrt{3}}{2n^2} = 0 - 0 = 0$

$lim_{n\to\infty}O_n = lim_{n\to\infty}3d - lim_{n\to\infty}\frac{6d}{n} = 3d - 0 = 3d$

2.95



$|AB| = l$

$|AP_1| = \frac{1}{2}l = a_1$

$|P_2P_1| = \frac{1}{4}l = a_2$

$|P_2P_3| = \frac{1}{8}l = a_3$

$|P_4P_3| = \frac{1}{16}l = a_4$

Widzimy, że długości poszczególnych odcinków tworzą ciąg geometryczny, w którym

$a_1 = \frac{1}{2}l$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

$$|AP_n| = \begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{n-1} - a_n & dla\ n\ parzystego \\ \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... - a_{n-1} + a_n & dla\ n\ nieparzystego \end{cases}$$

$|AP_1| = \frac{1}{2}l$

$|AP_2| = \frac{1}{2}l - \frac{1}{4}l = \frac{1}{4}l$

$|AP_3| = \frac{1}{2}l - \frac{1}{4}l + \frac{1}{8}l = \frac{1}{4}l + \frac{1}{8}l = \frac{3}{8}l$

$|AP_4| = \frac{1}{2}l - \frac{1}{4}l + \frac{1}{8}l - \frac{1}{16} = \frac{3}{8}l - \frac{1}{16}l = \frac{6}{16}l - \frac{1}{16}l = \frac{5}{16}l$

Zatem widzimy, że długość $|AP_n|$ jest różnicą ciągów $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$, w których:

$b_1 = \frac{1}{2}l$ oraz $q_b = \frac{1}{4}$,

$c_1 = \frac{1}{4}l$ oraz $q_c = \frac{1}{4}$.

$\Downarrow$

$|AP_n| = S_{b_n} - S_{c_n} = b_1 \cdot \frac{1-q_b^n}{1-q_b} - c_1 \cdot \frac{1-q_c^n}{1-q_c} = \frac{1}{2}l \cdot \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}l \cdot \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}l \cdot \frac{4}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4^n}) - \frac{1}{4}l \cdot \frac{4}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4^n}) =$

$= \frac{4}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4^n}) \cdot (\frac{1}{2}l - \frac{1}{4}l) = \frac{1}{4}l \cdot \frac{4}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4^n}) = \frac{1}{3}l \cdot (1 - \frac{1}{4^n})$

Granica długości odcinków $|AP_n|$ wynosi więc:

$lim_{n\to\infty}|AP_n| = lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3}l \cdot (1 - \frac{1}{4^n})) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}l \cdot (lim_{n\to\infty}1 - lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}) = \frac{1}{3}l \cdot (1-0) = \frac{1}{3}l$

2.96

Ponieważ przyrost ilościowy substancji jest proporcjonalny do przedziału czasu τ,

więc po chwili τ mamy:

$Q_\tau = Q_0 + k \cdot Q_0 \cdot \tau$, gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności

Zatem $Q_\tau = Q_0 \cdot (1 + k \cdot \tau)$

Dla $\tau = \frac{t}{n}$ otrzymujemy:

$Q_t^{(n)} = Q_0(1 + k \cdot \frac{t}{n})^n$

oraz

$lim_{n\to\infty}Q_t^{(n)} = lim_{n\to\infty}(Q_0(1 + k \cdot \frac{t}{n})^n) = Q_0 \cdot lim_{n\to\infty}[(1 + \frac{kt}{n})^{\frac{n}{kt}}]^{kt} =$

$= Q_0 \cdot [lim_{n\to\infty}(1 + \frac{kt}{n})^{\frac{n}{kt}}]^{kt} = Q_0 \cdot e^{kt}$