3.21.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Ponadto wyraz ogólny tego szeregu jest zbieżny do 0,

więc warunek konieczny zbieżności szeregu jest spełniony.

Wypiszmy kilka początkowych sum cząstkowych:

$s_1 = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2}$

$s_2 = s_1 + \frac{1}{2\cdot(2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$s_3 = s_2 + \frac{1}{3\cdot(3+1)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\vdots$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-k+1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) =$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n+1}) =$

$= 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Zatem:

$lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = lim_{n\to\infty} 1 - lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$

3.22.

$\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} + ... + \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} + ...$

Widzimy, że jest to szereg o wyrazach dodatnich. Ponadto jego wyraz ogólny $u_n = \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$

dąży do 0 (ponieważ w mianowniku tego ułamka mamy wielomian wyższego stopnia niż w liczniku),

więc warunek konieczny zbieżności szeregu jest spełniony.

Wypiszmy kilka początkowych sum cząstkowych:

$s_1 = \frac{3}{1^2\cdot 2^2} = \frac{3}{1\cdot 4} = \frac{3}{4}$

$s_2 = s_1 + \frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4\cdot 9} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{27}{36} + \frac{5}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

$s_3 = s_2 + \frac{2\cdot 3+1}{3^2\cdot 4^2} = \frac{8}{9} + \frac{7}{9\cdot 16} = \frac{8\cdot 16+7}{9\cdot 16} = \frac{128+7}{144} + \frac{135}{144} = \frac{15}{16}$

$\vdots$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{k+1}{k^2(k+1)^2} + \frac{k}{k^2(k+1)^2}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k^2(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)^2}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k(k+1)} \cdot (\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})) =$

$= \sum_{k=1}^{n}((\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})) = \sum_{k=1}^{n}((\frac{1}{k})^2 - (\frac{1}{k+1})^2) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} =$

$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

Ponieważ

$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2}=0$, więc otrzymujemy:

$s_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ a stąd:

$lim_{n\to\infty}s_n=lim_{n\to\infty}1-lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=1-0=1$

3.23.

$ln2+ln(1+\frac{1}{2})+ln(1+\frac{1}{3})+...+ln(1+\frac{1}{n})+...$

Zauważmy, że dla $n\in N \quad \wedge \quad n>0$ zarówno ułamek $\frac{1}{n}$ jak i logarytm naturalny są określone.

Ponadto mamy:

$lim_{n\to\infty}ln(1+\frac{1}{n})=(z\ ciągłości\ logarytmu\ naturalnego)=ln(lim_{n\to\infty}1+lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})=ln(1+0)=$

$=ln1=0$

zatem warunek konieczny zbieżności szeregu jest określony.

Wypiszmy kilka początkowych sum cząstkowych:

$s_1=ln2$

$s_2=ln2+ln(1+\frac{1}{2})=ln2+ln\frac{3}{2}$

$s_3=ln2+ln\frac{3}{2}+ln(1+\frac{1}{3})=ln2+ln\frac{3}{2}+ln\frac{4}{3}$

$\vdots$

$s_n=\sum_{k=1}^{n}ln(1+\frac{1}{k})=\sum_{k=1}^{n}ln\frac{k+1}{k}=(na\ podstawie\ wzoru\ ln\frac{a}{b}=lna-lnb)=$

$=\sum_{k=1}^{n}(ln(k+1)-lnk)=\sum_{k=1}^{n}ln(k+1)-\sum_{k=1}^{n}lnk=ln(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}ln(k+1)-ln1-\sum_{k=2}^{n}lnk$

Ponieważ

$\sum_{k=1}^{n-1}ln(k+1)-\sum_{k=2}^{n}lnk=0$, więc otrzymujemy:

$s_n=ln(n+1)-ln1=ln(n+1)-0=ln(n+1)$

Ponieważ wraz ze wzrostem n, powyższy logarytm rośnie do $+\infty$, więc:

$lim_{n\to\infty}s_n=lim_{n\to\infty}ln(n+1)=+\infty$

A zatem szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.24.

$ln\frac{1}{4}+ln\frac{2\cdot4}{1\cdot7}+ln\frac{3\cdot7}{2\cdot10}+ln\frac{4\cdot10}{3\cdot13}+...$

Zauważmy najpierw, że szereg ten począwszy od drugiego wyrazu jest szeregiem o wyrazach nieujemnych, więc możemy go jako taki traktować.

W poniższych wyliczeniach będziemy korzystali z wzorów:

$ln\frac{a}{b} = lna - lnb$

$ln(ab) = lna + lnb$

Wyliczmy kilka początkowyh sum częściowych:

$s_1 = ln\frac{1}{4} = ln1 - ln4$

$s_2 = s_1 + ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7} = ln\frac{1}{4} + ln(2\cdot 4) - ln(1\cdot 7) = ln1 - ln4 + ln2 + ln4 - ln1 - ln7 = ln2 - ln7$

$s_3 = s_2 + ln\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10} = ln2 - ln7 + (ln(3\cdot 7) - ln(2\cdot 10)) = ln2 - ln7 + ln3 + ln7 - ln2 - ln10 = ln3 - ln10$

$s_4 = s_3 + ln\frac{4\cdot 10}{3\cdot 13} = s_3 + (ln(4\cdot 10) - ln(3\cdot 13)) = ln3 - ln10 + ln4 + ln10 - ln3 - ln13 = ln4 - ln13$

$\vdots$na podstawie powyższych wyliczeń możemy podać wzór na n-tą sumę cząstkową

$s_n = lnn - ln(3n+1) \qquad (1)$

Udowodnijmy przez indukcję matematyczną prawdziwość powyższego wzoru na n-tą sumę cząstkową.

Dla $k = 1, 2, 3, 4$ wzór ten jest prawdziwy. Zakładamy teraz, że jest on prawdziwy dla $k \in N \quad \wedge \quad k \geqslant 1$:

$s_k = lnk - ln(3k+1)$

a twierdzimy, że prawdziwa jest teza indukcyjna:

$s_{k+1} = ln(k+1) - ln(3(k+1)+1) = ln(k+1) - ln(3k+4)$

Na podstawie sposobu określenia szeregu mamy:

$s_{k+1} = s_k + ln\frac{(k+1)(3k+1)}{k(3k+1+3)} = s_k + ln\frac{(k+1)(3k+1)}{k(3k+4)}$

Przekształćmy teraz wzór na (k+1)-tą sumę cząstkową:

$s_{k+1} = s_k + ln\frac{(k+1)(3k+1)}{k(3k+4)} = s_k + (ln((k+1)(3k+1)) - ln(k(3k+4))) =$

$= lnk - ln(3k+1) + ln(k+1) + ln(3k+1) - lnk - ln(3k+4) =$

$= ln(k+1) - ln(3k+4)$, czyli mamy tezę indukcyjną.

A zatem udowodniliśmy, że z założenia indukcyjnego wynika teza indukcyjna. Czyli wzór (1) jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej większej od 0.

Znajdźmy teraz granicę ciągu sum częściowych szeregu:

$lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty}(lnn - ln(3n+1)) = lim_{n\to\infty} ln\frac{n}{3n+1}$ =z ciągłości logarytmy naturalnego=

$= ln(lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}}) = ln\frac{1}{3+0} = ln\frac{1}{3}$

3.25.

$\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt[2n+1]{x}-\sqrt[2n-1]{x})$

To zdanie jest problematyczne. Zawiera błąd w treści, bo dla n=1 drugi pierwiastek przyjmuje postać $\sqrt[1]{x}$, co w matematyce nie jest określone. Dlatego napisałem w treści sumę zaczynającą się od n=2.

Ponadto musi zachodzić $x \in R_+ \cup \{0\}$, bo wyrażenie podpierwiastkowe nie może być ujemne.

Przekształćmy szereg do następującej postaci:

$\sum_{n=2}^{\infty}(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}})$

Obliczmy kilka początkowych sum cząstkowych:

$s_1 = x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}$

$s_2 = s_1 + x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{3}}$

$s_3 = s_2 + x^{\frac{1}{9}} - x^{\frac{1}{7}} = x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{9}} - x^{\frac{1}{7}} = x^{\frac{1}{9}} - x^{\frac{1}{3}}$

$s_4 = s_3 + x^{\frac{1}{11}} - x^{\frac{1}{9}} = x^{\frac{1}{9}} - x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{11}} - x^{\frac{1}{9}} = x^{\frac{1}{11}} - x^{\frac{1}{3}}$

$\vdots$

$s_n = x^{\frac{1}{2(n+1)+1}} - x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2n+3}} - x^{\frac{1}{3}}$

Zatem:

$lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2n+3}} - lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{3}}$

Dla $x = 0$ jest: $lim_{n\to\infty} 0^{\frac{1}{2n+3}} - lim_{n\to\infty} 0^{\frac{1}{3}} = 0 - 0 = 0$

Dla $x > 0$ jest: $lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2n+3}} - lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{3}} = lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2n+3}} - x^{\frac{1}{3}}$

Ponieważ przy $n \to \infty$ ułamek $\frac{1}{2n+3}$ dąży do 0, więc $lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2n+3}} = 1$, czyli

$lim_{n\to\infty} s_n = 1 - x^{\frac{1}{3}} = 1 - \sqrt[3]{x}$

Natomiast dla $x < 0$, tak jak to już powiedziano we wstępie szereg nie jest określony.

3.26.

$S_n = \frac{n+1}{n}$

Wypiszmy kilka początkowych sum cząstkowych:

$S_1 = \frac{1+1}{1} = 2 = u_1$

$S_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = u_1 + u_2$

$S_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} = u_1 + u_2 + u_3$

$S_4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

$S_5 = \frac{5+1}{5} = \frac{6}{5} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$

$\vdots$

$S_n = \frac{n+1}{n} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$

Na podstawie powyższych sum cząstkowych możemy wyliczyć początkowe wyrazy szeregu:

$u_1 = 2$

$u_2 = \frac{3}{2} - u_1 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$u_3 = \frac{4}{3} - u_1 - u_2 = \frac{4}{3} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

$u_4 = \frac{5}{4} - u_1 - u_2 - u_3 = \frac{5}{4} - 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$

$u_5 = \frac{6}{5} - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = \frac{6}{5} - 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{20}$

Zauważmy, że:

$u_2 = -\frac{1}{1 \cdot 2}$

$u_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3}$

$u_4 = -\frac{1}{3 \cdot 4}$

$u_5 = -\frac{1}{4 \cdot 5}$

i ogólnie:

$u_n = -\frac{1}{(n-1) \cdot n}$

Zatem szukany szereg ma postać:

$2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$

a jego suma wynosi:

$S = lim_{n \to \infty} S_n = lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = lim_{n \to \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = lim_{n \to \infty} 1 + lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$

Opcjonalnie obliczmy jeszcze sumę szeregu na podstawie sumy jego wyrazów:

$S = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{2-1} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} =$

(obie sumy nawzajem się znoszą) $= 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$.

Czyli otrzymaliśmy ten sam wynik co obliczając granicę ciągu sum cząstkowych.

To potwierdza poprawność naszych wyliczeń.

3.27.

$S_n = \frac{-1+2^n}{2^n}$

Wypiszmy kilka początkowych sum cząstkowych:

$S_1 = \frac{-1+2^1}{2^1} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} = u_1$

$S_2 = \frac{-1+2^2}{2^2} = \frac{-1+4}{4} = \frac{3}{4} = u_1 + u_2$

$S_3 = \frac{-1+2^3}{2^3} = \frac{-1+8}{8} = \frac{7}{8} = u_1 + u_2 + u_3$

$S_4 = \frac{-1+2^4}{2^4} = \frac{-1+16}{16} = \frac{15}{16} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

$S_5 = \frac{-1+2^5}{2^5} = \frac{-1+32}{32} = \frac{31}{32} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$

Na tej podstawie obliczmy kilka początkowych wyrazów:

$u_1 = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{3}{4} - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$u_3 = \frac{7}{8} - u_1 - u_2 = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$u_4 = \frac{15}{16} - u_1 - u_2 - u_3 = \frac{15}{16} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

$u_5 = \frac{31}{32} - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = \frac{31}{32} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$

Widzimy więc, że:

$u_n = \frac{1}{2^n}$

i szereg ma postać:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Jego suma wynosi:

$S = lim_{n\to\infty} S_n = lim_{n\to\infty} \frac{-1+2^n}{2^n} = lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{2^n}) + lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n} = 0 + 1 = 1$

Obliczmy jeszcze dla pewności sumę tego szeregu na podstawie znalezionej jego definicji:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}})$

jest to szereg geometryczny, w którym $a_1 = \frac{1}{2}$ i $q = \frac{1}{2}$. Zatem korzystając z wzoru na sumę szeregu geometrycznego obliczamy:

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Co potwierdza poprawność naszych wyliczeń.

3.28.

$S_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Wypiszmy kilka początkowych sum cząstkowych:

$S_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1 = u_1$

$S_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} = u_1 + u_2$

$S_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3} = u_1 + u_2 + u_3$

$S_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

$S_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$

$S_6 = \frac{(-1)^6}{6} = \frac{1}{6} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$

Na tej podstawie wyliczmy kilka początkowych wyrazów szeregu:

$u_1 = -1$

$u_2 = \frac{1}{2} - u_1 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$u_3 = -\frac{1}{3} - u_1 - u_2 = -\frac{1}{3} - (-1) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6}$

$u_4 = \frac{1}{4} - u_1 - u_2 - u_3 = \frac{1}{4} - (-1) - \frac{3}{2} - (-\frac{5}{6}) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} = \frac{7}{12}$

$u_5 = -\frac{1}{5} - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = -\frac{1}{5} - (-1) - \frac{3}{2} - (-\frac{5}{6}) - \frac{7}{12} = -\frac{1}{5} + 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12} = -\frac{9}{20}$

$u_6 = \frac{1}{6} - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 = \frac{1}{6} - (-1) - \frac{3}{2} - (-\frac{5}{6}) - \frac{7}{12} - (-\frac{9}{20}) = \frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12} + \frac{9}{20} = \frac{11}{30}$

Na tej podstawie możemy napisać wzór na wyraz ogólny szeregu:

$u_n = (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{(n-1)n}$

a więc nasz szereg wygląda następująco:

$-1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{(n-1)n}$

a jego suma wynosi:

$S = lim_{n\to\infty} S_n = lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, bo przy $n \to \infty$ wartości ciągu S_n dążą do 0 naprzemiennie raz po lewej stronie 0 a raz po prawej.

Obliczmy jeszcze dla pewności sumę znalezionego szeregu na podstawie jego definicji:

$S = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{(n-1)n}$

Rozbijmy powyższą sumę na sumę wyrazów parzystych i sumę wyrazów nieparzystych:

$S = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k} \cdot \frac{2(2k)-1}{(2k-1)\cdot 2k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k+1} \cdot \frac{2(2k+1)-1}{((2k+1)-1)\cdot(2k+1)} =$

$= -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-1}{(2k-1)\cdot 2k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+2-1}{2k\cdot(2k+1)} = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{(2k-1)\cdot 2k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\cdot(2k-1)} -$

$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k\cdot(2k+1)} = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k(2k-1)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k-1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k(2k+1)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k+1)} =$

$-1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k-1)} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k+1)} =$

$-1 + 2\cdot\frac{1}{2-1} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k-1)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k+1)} =$

$$= -1 + 2 + 0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k-1)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k+1)} = 1 - \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k-1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k+1)}) \quad (1)$$

Przekształćmy teraz wyrażenie w nawiasie:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k-1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(2k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2k+1}{k\cdot(2k-1)(2k+1)} + \frac{2k-1}{k\cdot(2k-1)(2k+1)}) = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2k+1+2k-1}{k\cdot(2k-1)(2k+1)}) =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{k\cdot(2k-1)(2k+1)} = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$S_{k_1} = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$

$S_{k_2} = S_{k_1} + \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$

$S_{k_3} = S_{k_2} + \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$

$S_{k_4} = S_{k_3} + \frac{1}{7\cdot 9} = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}$

$\vdots$

$S_{k_n} = \frac{k_n}{2k_n+1}$

$S_k = lim_{k_n\to\infty} \frac{k_n}{2k_n+1} = lim_{k_n\to\infty} \frac{\frac{k_n}{k_n}}{\frac{2k_n}{k_n}+\frac{1}{k_n}} = lim_{k_n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{k_n}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$

Zatem mamy:

$(1) = 1\text{-}\frac{1}{2}(4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$

Więc tym sposobem również suma wyniosła 0, co potwierdza poprawność naszych wyliczeń.

3.29.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

Z postaci szeregu widzimy, że jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Ponadto widać, że granica wyrazu ogólnego szeregu wynosi 0, więc warunek konieczny zbieżności szeregu jest spełniony. Zabadajmy teraz jego zbieżność.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Po prawej stronie nierówności mamy szereg harmoniczny rzędu 1, który jest rozbieżny. Zatem na podstawie kryterium porównawczego i twierdzenia (3.1.2) badany szereg jest rozbieżny.

3.30.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

Ponieważ $lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$, więc warunek konieczny zbieżności szeregu nie jest spełniony a zatem badany szereg jest rozbieżny.

3.31.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{logn}{n^3}$

Widzimy, że jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zbadajmy jego zbieżność:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{logn}{n^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Ponieważ po prawej stronie mamy szereg harmoniczny rzędu 2, który jest zbieżny, więc na podstawie kryterium porównawczego badany szereg również jest zbieżny.

3.32.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$

Widzimy, że jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Ponadto widać, że wyraz ogólny szeregu jest zbieżny do 0, ponieważ w mianowniku mamy wielomian stopnia wyższego niż w liczniku. A zatem warunek konieczny zbieżności szeregu jest spełniony.

Weźmy pod uwagę wyraz ogólny tego szeregu:

$u_n = \frac{n+2}{2n^3-1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2n^2-\frac{1}{n}} \leq \frac{1+2}{2n^2-\frac{1}{n}} < \frac{3}{2n^2-n^2} = \frac{3}{n^2} = 3 \cdot \frac{1}{n^2}$

Po prawej stronie mamy szereg harmoniczny stopnia 2, który jest zbieżny. Zatem na podstawie kryterium porównawczego oraz twierdzenia 3.1.2 stwierdzamy, że badany szereg jest zbieżny.