

3.33.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n} \quad (1)$$

Ponieważ $\sin 3^n \in \langle -1; 1 \rangle$, więc zbadajmy szereg złożony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu danego w zadaniu:

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin 3^n}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 3^n|}{3^n}, \text{ ale } |\sin 3^n| \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$\text{Zatem } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 3^n|}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad (3)$$

Po prawej stronie powyższej nierówności mamy szereg geometryczny, w którym $q = \frac{1}{3} < 1$ a zatem szereg (3) jest zbieżny. Na mocy kryterium porównawczego szereg (2) również jest zbieżny.

A na mocy kryterium bezwzględnej zbieżności szereg (1) dany w zadaniu jest bezwzględnie zbieżny.

3.34.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

Zauważmy, że $\frac{\pi}{3^n}$ dla $n \in \mathbb{N} \wedge n > 0$ jest kątem z pierwszej ćwiartki (bo $0 < \frac{\pi}{3^n} < \frac{\pi}{2}$), więc badany szereg jest szeregiem o wyrazach nieujemnych. Ponadto dla $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $\sin \alpha < \alpha$, więc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} < \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{\pi}{3^n} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Po prawej stronie mamy szereg geometryczny, w którym $q = \frac{2}{3} < 1$. Zatem jest on zbieżny. Na tej podstawie i na podstawie twierdzenia 3.1.2 oraz kryterium porównawczego zbieżności szeregów wnioskujemy, że szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.35.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Obliczmy granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{100^{n+1}} \cdot \frac{100^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{100} = \infty$$

A zatem na podstawie wniosku 3.2.6 do kryterium d'Alemberta badany szereg jest rozbieżny.

3.36.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

Zastosujmy kryterium d'Alemberta, mamy:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{e^n n!}{n^n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{e^n n!} = \frac{e \cdot e^n n! \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot (n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{e^n n!} = \frac{e \cdot n^n}{(n+1)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e \cdot n^n}{(n+1)^n} = e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Na podstawie zadania 2.10, mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Zatem ostatecznie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e \cdot \frac{1}{e} = 1$$

więc na mocy kryterium d'Alemberta szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.37.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}n}$$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zbadajmy granicę:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+1}{3n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} < 1 \end{aligned}$$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego badany szereg jest zbieżny.

3.38.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zbadajmy granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{5} < 1$$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego badany szereg jest zbieżny.

3.39.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n \quad (1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad a, b, a_n > 0$$

Z definicji szeregu oraz warunków podanych w zadaniu widzimy, że jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zbadajmy granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a_n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{b}{a}$$

Zatem na podstawie wniosków 3.2.10 i 3.2.11 do kryterium Cauchy'ego otrzymujemy, że szereg dany w zadaniu jest:

- 1) zbieżny gdy $\frac{b}{a} < 1 \Leftrightarrow b < a$,
- 2) rozbieżny gdy $\frac{b}{a} > 1 \Leftrightarrow b > a$.

Natomiast dla $b = a$ mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a_n}\right)^n \quad (2)$$

Gdy ciąg a_n jest od pewnego miejsca rosnący, to jego kolejne wyrazy zbliżają się do granicy a z lewej strony. A to oznacza, że wszystkie wszystkie wyrazy szeregu (2) są większe od 1, czyli szereg (2) jest rozbieżny do ∞ i tym samym szereg (1) jest rozbieżny.

Jeśli natomiast a_n jest od pewnego miejsca malejący, to jego kolejne wyrazy zbliżają się do granicy a z prawej strony. Oznacza, to że wszystkie wyrazy szeregu (2) są mniejsze od 1, jednak z każdym rosnącym n rosną one do granicy 1. Zatem ich suma także rośnie nieograniczenie. A zatem w tym przypadku szereg (1) jest także rozbieżny.

Jeśli natomiast szereg a_n ma wyrazy po lewej i prawej stronie granicy a , to musi on mieć ich

po jednej ze stron nieskończenie wiele i wystarczy odwołać się do odpowiedniego przypadku przeanalizowanego wyżej, żeby stwierdzić, że szereg (1) jest rozbieżny.

Podsumowując: dla $b = a$ szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.40.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n \quad (1)$$

Jest to szereg przemienny. Weźmy pod uwagę szereg bezwzględnych wartości powyższego szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \cdot \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n \quad (2)$$

Zbadajmy granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4} < 1$$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego (2) jest zbieżny. A dalej na podstawie kryterium bezwzględnej zbieżności twierdzimy, że szereg (1) dany w zadaniu jest bezwzględnie zbieżny.

3.41.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n \cdot 3^{n+1}}$$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Przekształćmy go do następującej postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{5}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3} \cdot (n+1) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \frac{n+1}{3} \right]$$

Zbadajmy granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)+1}{3}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \frac{n+1}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \frac{3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{5}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1+0}{1+0} = \frac{5}{6} < 1$$

A zatem na podstawie wniosku 3.2.5 do kryterium d'Alemberta badany w zadaniu szereg jest zbieżny.

3.42.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} \quad (1)$$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Ponadto dla $n > 0$ zachodzi nierówność:

$$\log n < n$$

Zatem prawdziwa jest następująca nierówność:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (2)$$

Zbadajmy granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{n}\right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$$

A zatem szereg (2) jest na podstawie wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego zbieżny.

Następnie stosując kryterium porównawcze stwierdzamy, że dany w zadaniu szereg także jest zbieżny (bo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$).

3.43.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctg n)^n}{2^n} \quad (1)$$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zauważmy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctg n)^n}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{4^n} \quad (2)$$

Zbadajmy teraz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\pi^n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < 1$$

Zatem korzystając z wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego szereg (2) jest zbieżny.

Natomiast korzystając z kryterium porównawczego stwierdzamy, że szerego (1) dany w zadaniu także jest zbieżny.

3.44.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)$$

Jest to szereg przemienny, którego wyraz ogólny dąży do 0, bo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 - 1 = 0$$

czyli wyrazy tego szeregu zblizają się do 0 raz z lewej a raz z prawej strony.

Sprawdźmy teraz czy $|u_{n+1}| < |u_n|$:

$$|\sqrt[n+1]{2} - 1| < |\sqrt[n]{2} - 1|$$

⇔

$$\sqrt[n+1]{2} - 1 < \sqrt[n]{2} - 1$$

⇔

$$\sqrt[n+1]{2} < \sqrt[n]{2} \quad /n(n+1)$$

⇔

$$2^n < 2^{n+1}$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem na mocy kryterium Leibniza szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.45.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

Wypiszmy sumę kilku początkowych wyrazów tego szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots = 1 - \frac{3}{2} + \frac{27}{16} - \frac{108}{64} + \dots$$

Rozważmy szereg bezwzględnych wartości powyższego szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \cdot n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

Zbadajmy granicę:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-1}}{n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{3}{4}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} = \\ &= \frac{1+0}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1 \end{aligned}$$

Zatem szereg wartości bezwzględnych szeregu danego w zadaniu jest zbieżny na mocy wniosku 3.2.5 do kryterium d'Alemberta. A tym samym na mocy kryterium bezwzględnej zbieżności, szereg dany w zadaniu jest bezwzględnie zbieżny.