3.33.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin3^n}{3^n}$ (1)

Ponieważ $sin3^n \in< -1; 1 >$, więc zbadajmy szereg złożony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu danego w zadaniu:

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{sin3^n}{3^n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|sin3^n|}{3^n}$, ale $|sin3^n| \in< 0; 1 >$

Zatem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|sin3^n|}{3^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ (3)

Po prawej stronie powyższej nierówności mamy szereg geometryczny, w którym $q = \frac{1}{3} < 1$ a zatem szereg (3) jest zbieżny. Na mocy kryterium porównawczego szereg (2) również jest zbieżny.

A na mocy kryterium bezwzględnej zbieżności szereg (1) dany w zadaniu jest bezwzględnie zbeżny.

3.34.

$\sum_{n=1}^{\infty}2^n sin\frac{\pi}{3^n}$

Zauważmy, że $\frac{\pi}{3^n}$ dla $n \in N \quad \wedge \quad n > 0$ jest kątem z pierwszej ćwiartki (bo $0 < \frac{\pi}{3^n} < \frac{\pi}{2}$), więc badany szereg jest szeregiem o wyrazach nieujemnych. Ponadto dla $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $sin\alpha < \alpha$, więc:

$\sum_{n=1}^{\infty}2^n sin\frac{\pi}{3^n} < \sum_{n=1}^{\infty}2^n \cdot \frac{\pi}{3^n} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$

Po prawej stronie mamy szereg geometryczny, w którym $q = \frac{2}{3} < 1$. Zatem jest on zbieżny. Na tej podstawie i na podstawie twierdzenia 3.1.2 oraz kryterium porównawczego zbieżności szeregów wnioskujemy, że szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.35.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Obliczmy granicę:

$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = lim_{n\to\infty}(\frac{(n+1)!}{100^{n+1}} \cdot \frac{100^n}{n!}) = lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{100} = \infty$

A zatem na podstawie wniosku 3.2.6 do kryterium d'Alemberta badany szereg jest rozbieżny.

3.36.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$

Jest to szerego o wyrazach nieujemnych. Ponieważ $e \approx 2,7183$, więc dla $n > 2$ zachodzi $n^n > e^n$.

Zatem:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} = \frac{e^1 1!}{1^1} + \frac{e^2 2!}{2^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} > e + \frac{1}{2}e + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^n n!}{e^n} = \frac{3}{2}e + \sum_{n=3}^{\infty} n!$

A ponieważ jest to szereg rozbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest rozbieżny.

3.37.

$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2n+1}{3n+1})^{\frac{1}{2}n}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zbadajmy granicę:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{2n+1}{3n+1})^{\frac{1}{2}n}} = lim_{n\to\infty} (\frac{2n+1}{3n+1})^{\frac{1}{2}} = lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{3n+1}} = \sqrt{lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1}} = \sqrt{lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}} =$
$= \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego badany szereg jest zbieżny.

3.38.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (\frac{3}{5})^n$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zbadajmy granicę:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot (\frac{3}{5})^n} = lim_{n\to\infty} (\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{5} < 1$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego badany szereg jest zbieżny.

3.39.

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{b}{a_n})^n \qquad (1), \; lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad a, b, a_n > 0$

Z definicji szeregu oraz warunków podanych w zadaniu widzimy, że jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zbadajmy granicę:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{b}{a_n})^n} = lim_{n\to\infty} \frac{b}{a_n} = \frac{lim_{n\to\infty} b}{lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{b}{a}$

Zatem na podstawie wniosków 3.2.10 i 3.2.11 do kryterium Cauchy'ego otrzymujemy, że szereg dany w zadaniu jest:

1) zbieżny gdy $\frac{b}{a} < 1 \Leftrightarrow b < a$,

2) rozbieżny gdy $\frac{b}{a} > 1 \Leftrightarrow b > a$.

Natomiast dla $b = a$ mamy:

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{b}{a_n})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a}{a_n})^n \qquad (2)$

Gdy ciąg a_n jest od pewnego miejsca rosnący, to jego kolejne wyrazy zbliżają się do granicy a z lewej strony. A to oznacza, że wszystkie wszystkie wyrazy szeregu (2) są większe od 1, czyli szereg (2) jest rozbieżny do ∞ i tym samym szereg (1) jest rozbieżny.

Jeśli natomiast a_n jest od pewnego miejsca malejący, to jego kolejne wyrazy zbliżają się do granicy a z prawej strony. Oznacza, to że wszystkie wyrazy szeregu (2) są mniejsze od 1, jednak z każdym rosnącym n rosną one do granicy 1. Zatem ich suma także rośnie nieograniczenie. A zatem w tym przypadku szereg (1) jest także rozbieżny.

Jeśli natomiast szereg a_n ma wyrazy po lewej i prawej stronie granicy a, to musi on mieć ich po jednej ze stron nieskończenie wiele i wystarczy odwołać się do odpowiedniego przypadku przeanalizowanego wyżej, żeby stwierdzić, że szereg (1) jest rozbieżny.

Podsumowując: dla $b = a$ szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.40.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot (\frac{3n+1}{4n+1})^n \qquad (1)$

Jest to szereg przemienny. Weźmy pod uwagę szereg bezwzględnych wartości powyższego szeregu:

$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n \cdot (\frac{3n+1}{4n+1})^n| = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3n+1}{4n+1})^n \qquad (2)$

Zbadajmy granicę:

$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{3n+1}{4n+1})^n} = lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+1} = lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4} < 1$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego (2) jest zbieżny. A dalej na podstwawie kryterium bezwzględnej zbieżności twierdzimy, że szereg (1) dany w zadaniu jest bezwzględnie zbieżny.

3.41.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)5^n}{2^n \cdot 3^{n+1}}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Przekształćmy go do następującej postaci:

$\sum_{n=0}^{\infty}[(\frac{5}{2})^n \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3} \cdot (n+1)] = \sum_{n=0}^{\infty}[(\frac{5}{6})^n \cdot \frac{n+1}{3}]$

Zbadajmy granicę:

$lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{5}{6})^{n+1}\cdot\frac{(n+1)+1}{3}}{(\frac{5}{6})^{n}\cdot\frac{n+1}{3}} = lim_{n\to\infty}(\frac{5}{6}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{3}{n+1}) = lim_{n\to\infty}(\frac{5}{6}\cdot\frac{n+2}{n+1}) = \frac{5}{6}\cdot lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1+0}{1+0} = \frac{5}{6} < 1$

A zatem na podstawie wniosku 3.2.5 do kryterium d'Alemberta badany w zadaniu szereg jest zbieżny.

3.42.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{logn}{2^n}$ (1)

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Ponadto dla n $>$ 0 zachodzi nierówność:

$logn < n$

Zatem prawdziwa jest następująca nierówność:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{logn}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (2)

Zbadajmy granicę:

$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{n}) = \frac{1}{2}lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$

A zatem szereg (2) jest na podstawie wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego zbieżny.

Następnie stosując kryterium porównawcze stwierdzamy, że dany w zadaniu szereg także jest zbieżny (bo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{logn}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$).

3.43.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(arctgn)^n}{2^n}$ (1)

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zauważmy, że:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(arctgn)^n}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{\pi}{2})^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi^n}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{4^n}$ (2)

Zbadajmy teraz granicę:

$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\pi^n}{4^n}} = lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < 1$

Zatem korzystając z wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego szereg (2) jest zbieżny.

Natomiast korzystając z kryterium porównawczego stwierdzamy, że szerego (1) dany w zadaniu także jest zbieżny.

3.44.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)$

Jest to szereg przemienny, którego wyraz ogólny dąży do 0, bo:

$lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2}-1)=lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}-lim_{n\to\infty}1=1-1=0$

czyli wyrazy tego szeregu zbliżają się do 0 raz z lewej a raz z prawej strony.

Sprawdźmy teraz czy $|u_{n+1}|<|u_n|$:

$|\sqrt[n+1]{2}-1|<|\sqrt[n]{2}-1|$

$\Updownarrow$

$\sqrt[n+1]{2}-1<\sqrt[n]{2}-1$

$\Updownarrow$

$\sqrt[n+1]{2}<\sqrt[n]{2} \qquad /^{n(n+1)}$

$\Updownarrow$

$2^n<2^{n+1}$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla każdego $n\in N$. Zatem na mocy kryterium Leibniza szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.45.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n(\frac{3}{4})^{n-1}$

Wypiszmy sumę kilku początkowych wyrazów tego szeregu:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n(\frac{3}{4})^{n-1}=1-2\cdot\frac{3}{4}+3\cdot(\frac{3}{4})^2-4\cdot(\frac{3}{4})^3+...=1-\frac{3}{2}+\frac{27}{16}-\frac{108}{64}+...$

Rozważmy szereg bezwzględnych wartości powyższego szeregu:

$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\cdot n(\frac{3}{4})^{n-1}|=\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{3}{4})^{n-1}$

Zbadajmy granicę:

$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\frac{3}{4})^{(n+1)-1}}{n(\frac{3}{4})^{n-1}}=lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\frac{3}{4})^{n}}{n(\frac{3}{4})^{n-1}}=lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3}{4})=lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\cdot lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}=$

$=\frac{1+0}{1}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}<1$

Zatem szereg wartości bezwzględnych szeregu danego w zadaniu jest zbieżny na mocy wniosku 3.2.5 do kryterium d'Alemberta. A tym samym na mocy kryterium bezwzględnej zbieżności, szereg dany w zadaniu jest bezwzględnie zbieżny.