**3.46.**

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{logn}$ (1)

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych.

Ponieważ dla $n \in N \quad \wedge \quad n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$logn < n$

więc

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{logn} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

Ponieważ po prawej stronie mamy szereg harmoniczny (rzędu 1), który jest rozbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

**3.47.**

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot logn}$

Jest to szereg przemienny, którego wyraz ogólny dąży do 0. Zbadajmy czy zachodzi nierówność:

$|u_{n+1}| < |u_n|$

Mamy:

$|u_n| - |u_{n+1}| = \frac{1}{n \cdot logn} - \frac{1}{(n+1)log(n+1)} = \frac{(n+1)log(n+1) - n \cdot logn}{n(n+1)logn \cdot log(n+1)}$ (1)

Mianownik powyższego ułamka jest większy od 0. Zbadajmy jego licznik:

$(n+1)log(n+1) - n \cdot logn = n \cdot log(n+1) - n \cdot logn + log(n+1) = n[log(n+1) - logn] + log(n+1)$

Ale dla $n \geqslant 2 \quad \wedge \quad n \in N$ mamy:

$log(n+1) - n \cdot logn > 0 \quad \wedge \quad log(n+1) > 0$

$\Downarrow$

Ułamek (1) jest większy od 0.

A tym samym oba warunki kryterium Leibniza są spełnione, więc szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

**3.48.**

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{lnn}{n}$

Jest to szereg przemienny.

Zbadajmy szereg złożony z wartości bezwzględnych powyższego szeregu:

$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{lnn}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{lnn}{n}$ (1)

Ponieważ:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{lnn}{n}=\frac{ln1}{1}+\frac{ln2}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{lnn}{n}>0+\frac{ln2}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{ln2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$

Po prawej stronie mamy szereg harmoniczny, który jest rozbieżny. Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg wartości bezwzględnych jest rozbieżny a tym samym szereg dany w zadaniu nie jest bezwzględnie zbieżny.

Obliczmy teraz granicę:

$lim_{n\to\infty}\frac{lnn}{n}=lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cdot lnn)=lim_{n\to\infty}lnn^{\frac{1}{n}}=lim_{n\to\infty}ln\sqrt[n]{n}=(z\,ciągłości\,funkcji\,ln)=$

$=ln[lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}]=ln1=0$

Czyli wyraz ogólny szeregu (1) dąży do 0.

Sprawdźmy następnie różnicę:

$|u_n|-|u_{n+1}|=\frac{lnn}{n}-\frac{ln(n+1)}{n+1}=\frac{(n+1)lnn-n\cdot ln(n+1)}{n(n+1)}\qquad(2)$

Mianownik powyższego ułamka jest większy od 0. Zbadajmy jego licznik:

$(n+1)lnn-n\cdot ln(n+1)=ln(n^{n+1})-ln[(n+1)^n]\geqslant?\ 0$

$$\Updownarrow$$

$$n^{n+1}-(n+1)^n\geqslant?\ 0$$

$$\Updownarrow$$

$$n^{n+1}\geqslant?\ (n+1)^n\qquad(3)$$

Nierówność (3) udowodnimy przy pomocy indukcji matematycznej. Sprawdźmy ją dla n$\in\{1,2,3,4,5\}$.

Dla n=1:

$1^{1+1}\geqslant?\ (1+1)^1$

$1\geqslant?\ 2$

W tym przypadku jest ona nieprawdziwa.

Dla n=2:

$2^{2+1}\geqslant?\ (2+1)^2$

$8\geqslant?\ 9$

W tym przypadku jest ona nieprawdziwa.

Dla n=3:

$3^{3+1}\geqslant?\ (3+1)^3$

$3^4\geqslant?\ 4^3$

$81 \geqslant ? \ 64$

W tym przypadku jest ona prawdziwa.

Dla n=4:

$4^{4+1} \geqslant ? \ (4+1)^4$

$4^5 \geqslant ? \ 5^4$

$1024 \geqslant ? \ 625$

W tym przypadku jest ona prawdziwa.

Dla n=5:

$5^{5+1} \geqslant ? \ (5+1)^5$

$5^6 \geqslant ? \ 6^5$

$15625 \geqslant ? \ 7776$

W tym przypadku jest ona prawdziwa.

Zakładamy więc, że dla pewnego $k \geqslant 3 \quad \wedge \quad k \in N$ nierówność $k^{k+1} \geqslant (k+1)^k$ (4) jest prawdziwa a twierdzimy, że jest ona prawdziwa dla $k+1$:

$$(k+1)^{(k+1)+1} \geqslant ((k+1)+1)^{k+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad (k+1)^{k+2} \geqslant (k+2)^{k+1}$$

Pomnóżmy obie strony nierówności (4) przez $\frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}$:

$$k^{k+1} \cdot \frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}} \geqslant (k+1)^k \cdot \frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}$$

$$(k+1)^{k+2} \geqslant \frac{(k+1)^{k+(k+2)}}{k^{k+1}}$$

$$(k+1)^{k+2} \geqslant \frac{(k+1)^{2(k+1)}}{k^{k+1}}$$

Przekształćmy teraz prawą stronę powyższej nierówności:

$$\frac{(k+1)^{2(k+1)}}{k^{k+1}} = \frac{[(k+1)^2]^{k+1}}{k^{k+1}} = (\frac{k^2+2k+1}{k})^{k+1} > (\frac{k^2+2k}{k})^{k+1} = (k+2)^{k+1}$$

Zatem otrzymaliśmy prawdziwość tezy indukcyjnej a tym samym prawdziwość wzoru:

$k^{k+1} \geqslant (k+1)^k \quad$ dla $k \geqslant 3 \quad \wedge \quad k \in N$.

Prawdziwy jest więc wzór (3) a ułamek (2) jest większy lub równy 0.

Na podstawie zaś kryterium Leibniza szereg dany w zadaniu jest zbieżny (warunkowo - bo nie jest bezwzględnie zbieżny).

**3.49.**

$\sum_{n=1}^{\infty} ln\frac{n^2+1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ln(1+\frac{1}{n^2})$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych, którego wyraz ogólny dąży do 0, bo:

$lim_{n\to\infty} ln(1+\frac{1}{n}) = (z\, ciągłości\, funkcji\, ln)\ \ ln(lim_{n\to\infty}1 + lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}) = ln(1+0) = ln1 = 0$

Porównajmy teraz ten szereg z szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. Pytamy się dla jakich wartości $\alpha > 1\ \wedge\ \alpha \in N$ zachodzi:

$ln\frac{n^2+1}{n^2} < \frac{1}{n^{\alpha}}$ (1)

$\Updownarrow$

$\frac{n^2+1}{n^2} < e^{\frac{1}{n^{\alpha}}}$ $\quad /\hat{}\, n^{\alpha}$

$(1+\frac{1}{n^2})^{n^{\alpha}} < (e^{\frac{1}{n^{\alpha}}})^{n^{\alpha}}$

$(1+\frac{1}{n^2})^{n^{\alpha}} < e$ (2)

Powyższa nierówność jest spełniona tylko wtedy gdy $\alpha = 2$, gdyż wtedy wraz ze wzrostem $n$ lewa strona dąży do $e$ z lewej strony a tym samym zawsze jest od e mniejsza. Tak więc dla $\alpha = 2$ jest spełniona nierówność (1).Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (jako szereg harmoniczny rzędu 2), więc na mocy kryterium porównawczego zbieżny jest szereg dany w zadaniu.

**3.50.**

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot ln^2 n}$

Jest to szerego o wyrazach nieujemnych, którego wyraz ogólny dąży do 0.

Zauważmy, że:

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot ln^2 n} = \frac{1}{2^2\cdot ln^2 2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2 ln^2 n} < \frac{1}{4\cdot ln^2 2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \ (bo\ dla\ n \geqslant 3 \wedge n \in N\ lnn > 1)$

A ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (jako szereg harmoniczny rzędu 2), więc szereg dany w zadaniu jest na podstawie kryterium porównawczego zbieżny.

**3.51.**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych.

Zbadajmy granicę:

$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = lim_{n\to\infty}[\frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n^{10}}] = lim_{n\to\infty}[\frac{1}{10}\cdot(\frac{n+1}{n})^{10}] = \frac{1}{10}\cdot lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^{10} = \frac{1}{10}\cdot[lim_{n\to\infty}(\frac{1+\frac{1}{n}}{1})]^{10} =$

$= \frac{1}{10} \cdot (\frac{1+0}{1})^{10} = \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10} < 1$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.5 do kryterium d'Alemberta szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

**3.52.**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} \cdot 99^n}{100^n}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych.

Obliczmy granicę:

$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{100} \cdot 99^n}{100^n}} = lim_{n\to\infty}(\frac{99}{100} \cdot \sqrt[n]{n^{100}}) = \frac{99}{100} \cdot lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{100} =$

$= \frac{99}{100} \cdot [lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})]^{100} = \frac{99}{100} \cdot 1^{100} = \frac{99}{100} < 1$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.10 do kryterium Cauchy'ego szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

**3.53.**

$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{n+1}}}$ (w tym zadaniu szereg powinien zaczynać się od n=2, bo dla n=1 pierwiastek nie jest zdefiniowany)

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych.

$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{n+1}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n \cdot n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$

Zauważmy teraz, że $\sqrt[n]{n} < logn$, zatem $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{logn}$ i

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot logn}$

Ale ostatni szereg jest rozbieżny co zostało pokazane w zadaniu 3.13 a tym samym na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

**3.54.**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(n+3)! \cdot 3^n}{(2n)!}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych.

Zbadajmy granicę:

$lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = lim_{n\to\infty}[\frac{n!(n+4)! \cdot 3^{n+1}}{(2 \cdot (n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+3)! \cdot 3^n}] = lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n+4) \cdot 3^n \cdot 3 \cdot 2n!}{(2n+2)! \cdot 3^n} = lim_{n\to\infty} \frac{3n \cdot (n+4)}{(2n+1)(2n+2)} =$

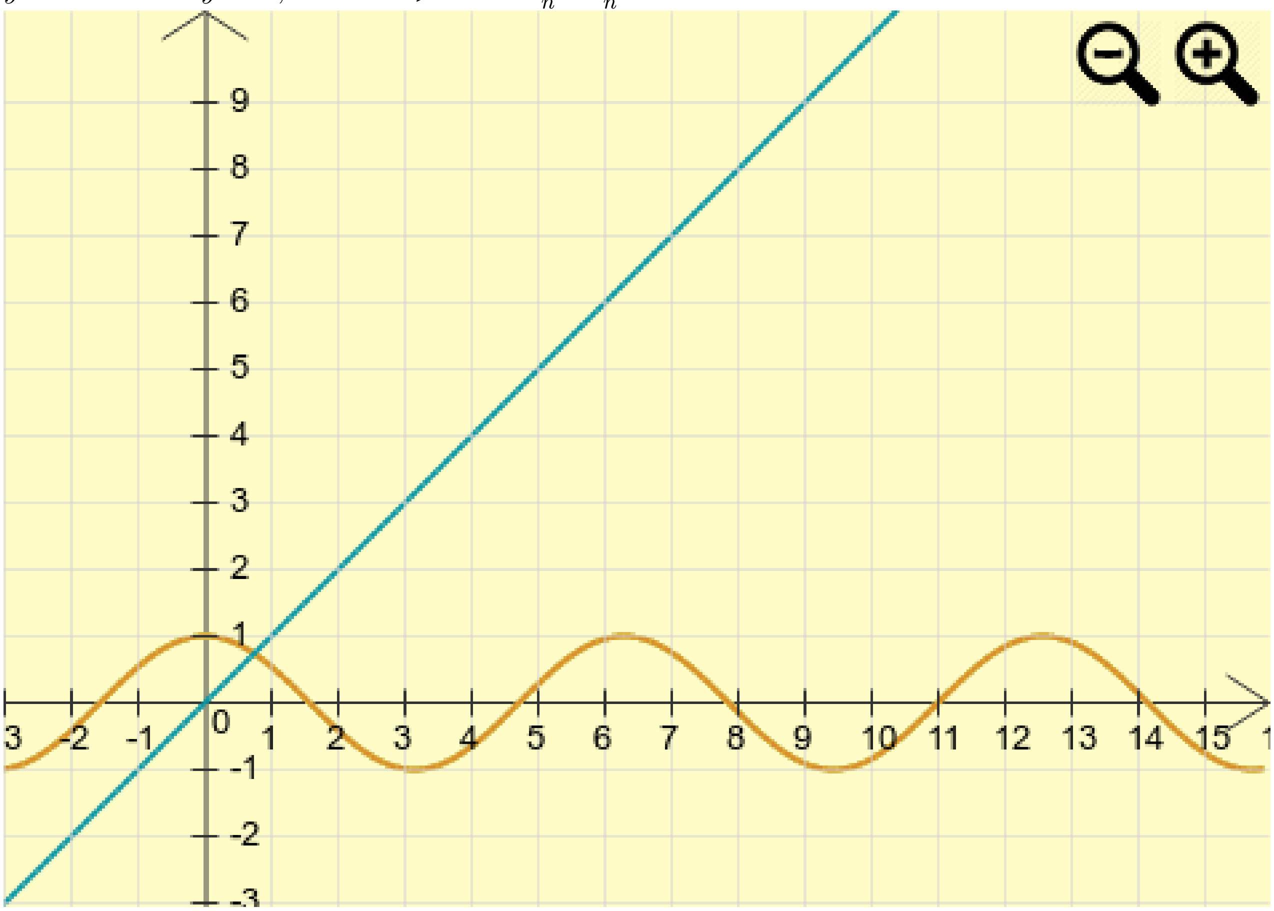
$= lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+12n}{4n^2+4n+2n+2} = lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+12n}{4n^2+6n+2} = lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{12}{n}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{3+0}{4+0+0} = \frac{3}{4} < 1$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.5 do kyterium d'Alemberta szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

**3.55.**

$\sum_{n=1}^{\infty}(sin\frac{1}{n} \cdot cos\frac{1}{n})$ (1)

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych, gdyż kąt w obu funkcjach trygonometrycznych dąży do 0 z prawej strony czyli należy do pierwszej ćwiartki. Zauważmy na podstawie wykresów funkcji $y = cosx$ oraz $y = x$, że dla $n \geqslant 2$ $cos\frac{1}{n} > \frac{1}{n}$:




Zatem mamy:

$\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{1}{n} \cdot cos\frac{1}{n} = sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} sin\frac{1}{n} \cdot cos\frac{1}{n} > sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} sin\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$

Ponieważ $logx < 0$ dla $x \in (0; 1)$, więc również jest $\frac{1}{logx} < 0$ dla $x \in (0; 1)$.

Zachodzi też:

$sin\frac{1}{n} > |\frac{1}{log\frac{1}{n}}|$, bo $lim_{n\to\infty}log\frac{1}{n} = -\infty$ i $\frac{1}{log\frac{1}{n}}$ wraz ze wzrostem $n$ szybciej dąży do 0 niż $sin\frac{1}{n}$.

Zatem:

$sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} sin\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} > sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} |\frac{1}{log\frac{1}{n}}| \cdot \frac{1}{n} = sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot |log1 - logn|} =$

$= sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot |0 - logn|} = sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot logn}$

Ponieważ składnik $sin1 \cdot cos1$ nie wpływa na zbieżność szeregu oraz szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot logn}$ jest rozbieżny (na podstawie zadania 3.13), więc na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.