3.56.

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 sin\frac{2}{n} tg\frac{5}{n})$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych.

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 sin\frac{2}{n} tg\frac{5}{n}) = 1^2 sin2 \cdot tg5 + 2^2 sin1 \cdot tg\frac{5}{2} + 3^2 sin\frac{2}{3} \cdot tg\frac{5}{3} + 4^2 sin\frac{2}{4} \cdot tg\frac{5}{4} + \sum_{n=5}^{\infty}(n^2 sin\frac{2}{n} tg\frac{5}{n}) =$

$sin2 \cdot tg5 + 4sin1 \cdot tg\frac{5}{2} + 9sin\frac{2}{3} \cdot tg\frac{5}{3} + 16sin\frac{1}{2} \cdot tg\frac{5}{4} + \sum_{n=5}^{\infty}(n^2 sin\frac{2}{n} tg\frac{5}{n}) \qquad (1)$

Podstawny teraz:

$a = sin2 \cdot tg5 + 4sin1 \cdot tg\frac{5}{2} + 9sin\frac{2}{3} \cdot tg\frac{5}{3} + 16sin\frac{1}{2} \cdot tg\frac{5}{4} = const$

$(1) = a + \sum_{n=5}^{\infty}(n^2 sin\frac{2}{n} tg\frac{5}{n}) > (na\ podstawie\ wzoru\ x < tgx)\ a + \sum_{n=5}^{\infty}(n^2 sin\frac{2}{n} \cdot \frac{5}{n}) =$

$= a + \sum_{n=5}^{\infty}(5n \cdot sin\frac{2}{n})$

Weźmy pod uwagę wzór:

$lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$

Podstawiając $x = \frac{2}{n}$ otrzymujemy:

$lim_{n\to\infty}\frac{sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 1$

W myśl definicji granicy ciągu możemy dla dowolnej liczby dodatniej ε znaleźć w ciągu takie miejsce N, żeby była spełniona nierówność:

$|\frac{sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} - 1| < \varepsilon \qquad$ dla każdego $n > N$

czyli

$1 - \varepsilon < \frac{sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} < 1 + \varepsilon \qquad$ dla $n > N$

Przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{2}$ mamy:

$1 - \frac{1}{2} < \frac{sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} < 1 + \frac{1}{2} \qquad$ dla $n > N$

skąd:

$sin\frac{2}{n} > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n}$

$sin\frac{2}{n} > \frac{1}{n} \quad / \cdot 5n$

$5n \cdot sin\frac{2}{n} > \frac{5n}{n}$

$5n \cdot sin\frac{2}{n} > 5$

Zatem mamy:

$a + \sum_{n=5}^{\infty}(5n \cdot sin\frac{2}{n}) > a + \sum_{n=5}^{\infty} 5$

A ponieważ po prawej stronie mamy szereg rozbieżny ($\sum_{n=5}^{\infty} 5 \to \infty$), więc na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.57.

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{n!}$

Jest to szereg przemienny. Zbadajmy więc szereg złożony z wartości bezwzględnych powyższego szeregu.

$\sum_{n=0}^{\infty}|(-1)^{n+1}\frac{10^n}{n!}| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$ (1)

Obliczmy granicę:

$lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n} = lim_{n\to\infty}(\frac{10^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{10^n}{n!}) = lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 10^n} = lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1} = 0 < 1$

Zatem na podstawie wniosku 3.2.5 do kryterium d'Alemberta szereg (1) jest zbieżny a tym samym bezwzględnie zbieżny jest szereg dany w zadaniu.

3.58.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zauważmy, że:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}3\cdot\frac{1}{n^2}$

Więc na podstawie kryterium porównawczego i twierdzenia 3.1.2 szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.59.

$\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{1}{n}\cdot tg\frac{1}{n}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Korzystając z wzoru:

$x > sinx$ dla $x \in (0;\frac{\pi}{2})$

mamy:

$\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{1}{n}\cdot tg\frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot tg\frac{1}{n}$ (1)

Weźmy teraz pod uwagę wzór:

$lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$

Podstawiając $x = \frac{1}{n}$ mamy:

$lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

Zatem korzystając z definicji granicy ciągu, dla dowolnego $\epsilon > 0$ można znaleźć takie N, że:

$|\frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$ dla $n > N$

$1 - \epsilon < \frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon$ dla $n > N$

Przyjmując $\epsilon = 1$, dla $n > N$ mamy:

$\frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 1 + 1$

$\frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 2$

$tg\frac{1}{n} < 2 \cdot \frac{1}{n} \quad / \cdot \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} \cdot tg\frac{1}{n} < \frac{2}{n^2}$

A ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ jest zbieżny (jako iloczyn stałej 2 przez zbieżny szereg harmoniczny rzędu 2), więc na mocy kryterium porównawczego zbieżny jest też szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot tg\frac{1}{n}$. I dalej znów na mocy kryterium porównawczego (bo zachodzi nierówność(1)) zbieżny jest też szereg dany w zadaniu.

3.60.

$\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot tg\frac{1}{\sqrt{n}}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Korzystając z wzoru

$x < tgx$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

mamy

$\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot tg\frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ (1)

Weźmy teraz pod uwagę wzór:

$lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

podstawiając $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ mamy:

$lim_{n\to\infty} \frac{sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

Korzystając z definicji granicy ciągu, dla dowolnego $\epsilon > 0$ można znaleźć takie N, że:

$|\frac{sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1| < \epsilon$ dla $n > N$

$1 - \epsilon < \frac{sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} < 1 + \epsilon$ dla $n > N$

Przyjmując $\epsilon = \frac{1}{2}$, dla $n > N$ mamy:

$1 - \frac{1}{2} < \frac{sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$\frac{1}{2} < \frac{sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$\frac{1}{2\sqrt{n}} < sin\frac{1}{\sqrt{n}} \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (jako iloczyn stałej $\frac{1}{2}$ przez rozbieżny szereg harmoniczny rzędu 1), więc na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot sin\frac{1}{n}$ jest także rozbieżny.

A ponieważ zachodzi nierówność (1) więc ponownie korzystając z kryterium porównawczego wnioskujemy, że szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.61.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} cos\frac{1}{n}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Przekształćmy ten szereg następująco:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} cos\frac{1}{n} = \frac{1}{1} \cdot cos\frac{1}{1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} cos\frac{1}{n} = cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} cos\frac{1}{n}$

Ale $cos\frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ dla $n > 1$, zatem

$cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} cos\frac{1}{n} > cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$

A ponieważ szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ jest rozbieżny jako iloczyn stałej $\frac{1}{2}$ przez szereg harmoniczny rzędu 1 (który jest rozbieżny), więc na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.62.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Weźmy pod uwagę wyraz ogólny szeregu:

$u_n = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

Pomnóżmy licznik i mianownik przez $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$:

$u_n = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n(\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2)} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n(n+1-n)} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Podstawmy $k = n + 1$:

$u_k = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$

A ponieważ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ jest rozbieżny jako szereg harmoniczny rzędu $\frac{1}{2}$, więc na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.63.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot sin^2 \frac{1}{n}$

Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Skorzystajmy z wzoru:

$lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

Po podstawieniu $x = \frac{1}{n}$ mamy:

$lim_{n \to \infty} \frac{sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

Korzystając z definicji granicy ciągu, dla dowolnego $\epsilon > 0$ możemy znaleźć takie N, że:

$|\frac{sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$ dla $n > N$

$1 - \epsilon < \frac{sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon$ dla $n > N$

Przyjmując $\epsilon = 1$, dla $n > N$ mamy:

$\frac{sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 1 + 1$

$sin \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \quad /^2$

$sin^2 \frac{1}{n} < \frac{4}{n^2} \quad / \cdot \sqrt{n}$

$\sqrt{n} \cdot sin^2 \frac{1}{n} < \frac{4\sqrt{n}}{n^2}$

$\sqrt{n} \cdot sin^2 \frac{1}{n} < 4 \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2}$

$\sqrt{n} \cdot sin^2 \frac{1}{n} < 4 \cdot n^{\frac{1}{2} - 2}$

$\sqrt{n} \cdot sin^2 \frac{1}{n} < 4 \cdot n^{-\frac{3}{2}}$

$\sqrt{n} \cdot sin^2 \frac{1}{n} < 4 \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Czyli

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot sin^2 \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Ponieważ po prawej stronie mamy iloczyn stałej 4 przez szereg harmoniczny rzędu $\frac{3}{2}$, który jest zbieżny, zatem na mocy kryterium porównawczego zbieżny jest też szereg dany w zadaniu.

3.64.

$\sum_{n=1}^{\infty} (sin \frac{1}{n} \cdot cos^2 \frac{1}{n})$

Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Przekształćmy go następująco:

$\sum_{n=1}^{\infty} (sin \frac{1}{n} \cdot cos^2 \frac{1}{n}) = sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} (sin \frac{1}{n} \cdot cos^2 \frac{1}{n})$

Ale $cos \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ dla $n > 1$, zatem

$sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} (sin \frac{1}{n} \cdot cos^2 \frac{1}{n}) > sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} (sin \frac{1}{n} \cdot (\frac{1}{2})^2) = sin1 \cdot cos1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot sin \frac{1}{n}$

Po prawej stronie mamy iloczyn stałej $\frac{1}{4}$ przez szereg rozbieżny ($\sum_{n=2}^{\infty} sin\frac{1}{n}$, co zostało pokazane w zadaniu 3.10), zatem na podstawie kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.