3.65.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$

W szeregu tym występują wyrazy dodatnie i ujemne, ale nie na przemian. Zbadajmy więc szereg:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sin(n\sqrt{n})|}{n\sqrt{n}}$

złożony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu danego w zadaniu.

Ponieważ $|sin(n\sqrt{n})| \leqslant 1$, więc

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sin(n\sqrt{n})|}{n\sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Po prawej stronie mamy szereg harmoniczny rzędu $\frac{3}{2}$, który jest zbieżny (bo $\frac{3}{2} > 1$), więc na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sin(n\sqrt{n})|}{n\sqrt{n}}$ jest zbieżny. Tym samym szereg dany w zadaniu jest bezwzględnie zbieżny.

3.66.

$\sum_{n=1}^{\infty} sinna^n$

W szeregu tym występują wyrazy dodatnie i ujemne, ale nie na przemian. Zauważmy, że:

1). Dla $a = 1$ szereg przyjmuje postać:

$\sum_{n=1}^{\infty} sinna^n = \sum_{n=1}^{\infty} sinn = sin1 + sin2 + sin3 + ...$

Ale $sinn$ dla $n \to \infty$ zmienia się okresowo od -1 do 1 i ciąg $\{u_n\}$, gdzie $u_n = sinn$ jest rozbieżny. Tym samym szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

2). Dla $a = -1$ szereg przyjmuje postać:

$\sum_{n=1}^{\infty} sinn(-1)^n = sin(-1) + sin2 + sin(-3) + sin4 + sin(-5) + ...$

W tym przypadku ciąg $\{u_n\}$ wygląda następująco:

$$u_n = \begin{cases} sinn & dla \;\; n = 2k \\ \\ sin(-n) & dla \;\; n = 2k-1 \end{cases} \qquad gdzie \;\; k \in N \wedge k > 0$$

Ciąg ten jest także rozbieżny, bo $sinx$ zmienia sie okresowo od -1 do 1. Zatem szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3). Dla $a > 1$ szereg przyjmuje postać:

$\sum_{n=1}^{\infty} sinna^n = sina + sin2a^2 + sin3a^3 + sin4a^4 + sin5a^5 + ...$

Tutaj także wartości, z których obliczamy sinus dążą do $+\infty$ a w tym przedziale $sinx$

zmienia sie okresowo od -1 do 1. Zatem szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

4). Dla $a < -1$ szereg przyjmuje postać:

$\sum_{n=1}^{\infty} sinna^n = sin(-|a|) + sin(2|a|^2) + sin(-3|a|^3) + sin(4|a|^4) + sin(-5|a|^5) + ...$

W tym przypadku wartości, z których obliczamy sinus dążą do $-\infty$ dla nieparzystych wyrazów szeregu oraz do $+\infty$ dla wyrazów parzystych. A ponieważ $sinx$, dla tych wartości zmienia się okresowo od -1 do 1, więc ciąg u_n jest rozbieżny i szereg dany w zadaniu też jest rozbieżny.

5). Dla $a \in (-1; 1)$ $\quad a^n \to 0$ jako szereg geometryczny, w którym $|q| < 1$

Zbadajmy ciąg $v_n = na^n$, gdzie $|a| < 1$:

$$lim_{n\to\infty}|\frac{v_{n+1}}{v_n}| = lim_{n\to\infty}|\frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n}| = lim_{n\to\infty}|\frac{n+1}{n} \cdot a| = |a| \cdot lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = |a| \cdot 1 = |a| \qquad (1)$$

A więc zgodnie z twierdzeniem udowodnionym w zadaniu 2.12

$lim_{n\to\infty}v_n = lim_{n\to\infty}na^n = 0$

i dalej na podstawie ciągłości funkcji sinus

$lim_{n\to\infty}u_n = lim_{n\to\infty}sinna^n = sin(lim_{n\to\infty}na^n) = sin0 = 0$

Czyli warunek konieczny zbieżności szeregu jest spełniony.

Rozważmy teraz trzy przypadki:

a). $a = 0$

Wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} sin(n \cdot 0^n) = \sum_{n=1}^{\infty} sin0 = 0$

Czyli szereg jest zbieżny.

b). $a \in (0; 1)$

Skorzystajmy z wzoru $sinx < x$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

$\sum_{n=1}^{\infty} sinna^n < \sum_{n=1}^{\infty} na^n$

Po prawej stronie mamy szereg zbieżny na podstawie obliczeń (1) i wniosku 3.2.5 do kryterium d'Alemeberta. Zatem a podstawie kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

c). $a \in (-1; 0)$

W tym przypadku w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} sinna^n$ występują wyrazy dodatnie i ujemne, ale nie na przemian. Dla n parzystych szereg zachowuje się tak jak w punkcie b (bo a^n jest dodatnie). Dla n nieparzystych mamy:

$\sum_{k=1}^{\infty} sin[(2k-1)\cdot a^{2k-1} =$ (funkcja $sinx$ jest nieparzysta) $= \sum_{k=1}^{\infty} -sin[(2k-1)\cdot |a|^{2k-1}] =$

$= -\sum_{k=1}^{\infty} sin[(2k-1)\cdot |a|^{2k-1}]$

Korzystając teraz z wzoru $sinx < x$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ mamy:

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} sin[(2k-1)\cdot |a|^{2k-1}] < -\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\cdot |a|^{2k-1} \qquad (2)$$

Obliczmy granicę:

$$lim_{k\to\infty} \frac{w_{k+1}}{w_k} = lim_{k\to\infty} \frac{[(2k-1)+1]\cdot|a|^{(2k-1)+1}}{(2k-1)\cdot|a|^{2k-1}} = lim_{k\to\infty} \frac{2k\cdot|a|^{2k}}{(2k-1)\cdot|a|^{2k-1}} = lim_{k\to\infty} \frac{2k\cdot|a|}{2k-1} = |a|\cdot lim_{k\to\infty} \frac{2}{2-\frac{1}{k}} =$$

$= |a|\cdot 1 = |a| < 1$

Zatem korzystając z wniosku 3.2.5 do kryterium d'Alemberta szereg po prawej stronie nierówności (2) jest zbieżny. A skoro tak, to na podstawie kryterium porównawczego i twierdzenia 3.1.2 zbieżny jest też szereg dany w zadaniu (dla $a \in (-1; 0)$).

Czyli podsumowując, szereg dany w zadaniu jest zbieżny dla $a \in (-1; 1)$ i rozbieżny dla $|a| \geqslant 1$.

3.67.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 \frac{1}{n}}{tg \frac{1}{\sqrt{n}}}$

Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Ponieważ zachodzi wzór $x < tgx$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, więc

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 \frac{1}{n}}{tg \frac{1}{\sqrt{n}}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} sin^2 \frac{1}{n}$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny, co zostało pokazane w zadaniu 3.63. Zatem na podstawie kryterium porównawczego zbieżny jest też szereg dany w zadaniu.

3.68.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n\alpha)}{(ln10)^n}$

Jeżeli $\alpha = 0$, to szereg przyjmuje postać:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n\cdot 0)}{(ln10)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{(ln10)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

Czyli szereg jest zbieżny.

Dla $\alpha \neq 0$ w szeregu tym występują wyrazy dodatnie i ujemne, ale nie na przemian. Rozważmy więc szereg złożony z wartości bezwzględnych podanego szeregu:

$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{sin(n\alpha)}{(ln10)^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sin(n\alpha)|}{(ln10)^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln10)^n}$

Ponieważ $2 < ln10 < 3$, więc po prawej stronie mamy szereg geometryczny, w którym $q = \frac{1}{ln10} < 1$.

Zatem szereg ten jest zbieżny. Korzystając natomiast z kryterium porównawczego oraz kryterium bezwzględnej zbieżności szeregów wnioskujemy, że szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.69.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}$

Jest to szereg przemienny. Zbadajmy szereg wartości bezwzględnych z wyrazów powyższego szeregu:

$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}| = \sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}$

Weźmy pod uwagę wzór:

$lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$

Podstawiając $x = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ mamy:

$lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1$

Korzystając z definicji granicy ciągu, dla dowolnego $\epsilon > 0$ można znaleźć takie N, że:

$|\frac{tg\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} - 1| < \epsilon \qquad \text{dla } n > N$

$1 - \epsilon < \frac{tg\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} < 1 + \epsilon \quad \text{dla } n > N$

Przyjmując $\epsilon = \frac{1}{2}$ dla $n > N$ mamy:

$\frac{tg\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} < 1 + \frac{1}{2} \quad / \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$tg\frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$

$tg\frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$ jest zbieżny jako iloczyn stałej $\frac{3}{2}$ przez szereg harmoniczny rzędu $\frac{3}{2} > 1$, więc na mocy twierdzenia 3.1.2 i kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}$ jest również zbieżny. Korzystając teraz z kryterium bezwzględnej zbieżności szeregów wnioskujemy, że szereg dany w zadaniu jest bezwzględnie zbieżny.

3.70.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Ponieważ zachodzi:

$\sqrt{n(n+1)(n+2)} > \sqrt{n\cdot n\cdot n}$

więc mamy:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\cdot n\cdot n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Widzimy, że po prawej stronie mamy szereg harmoniczny rzędu $\frac{3}{2} > 1$, który jest zbieżny.

Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.71.

$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n})$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych (bo $\sqrt[3]{n^3+n} > \sqrt[3]{n^3-n}$). Przekształćmy szereg korzystając z wzoru:

$a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3+n})^3-(\sqrt[3]{n^3-n})^3}{(\sqrt[3]{n^3+n})^2+\sqrt[3]{n^3+n}\cdot\sqrt[3]{n^3-n}+(\sqrt[3]{n^3-n})^2} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n-(n^3-n)}{(\sqrt[3]{n^3+n})^2+\sqrt[3]{n^3+n}\cdot\sqrt[3]{n^3-n}+(\sqrt[3]{n^3-n})^2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(\sqrt[3]{n^3+n})^2+\sqrt[3]{n^3+n}\cdot\sqrt[3]{n^3+n}+(\sqrt[3]{n^3+n})^2} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3\cdot(\sqrt[3]{n^3+n})^2} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3\cdot(\sqrt[3]{n^3+n^3})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3\cdot(\sqrt[3]{2n^3})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3\cdot n^2\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n\cdot\sqrt[3]{4}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{1}{n})$

Po prawej stronie mamy szereg rozbieżny (jako iloczyn stałej $\frac{2}{3\sqrt[3]{4}}$ przez rozbieżny szereg harmoniczny rzędu 1). Zatem na mocy twierdzenia 3.1.2 i kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.72.

$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^3+4} - n)$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych (bo $\sqrt[3]{n^3+4} > n$). Przekształćmy szereg korzystając z wzoru:

$a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^3+4} - n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3+4})^3-n^3}{(\sqrt[3]{n^3+4})^2+(\sqrt[3]{n^3+4})\cdot n+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4-n^3}{(\sqrt[3]{n^3+4})^2+n\sqrt[3]{n^3+4}+n^2} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(\sqrt[3]{n^3+4})^2+n\sqrt[3]{n^3+4}+n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$

Ponieważ szereg po prawej stronie jest zbieżny (jako iloczyn stałej 4 przez zbieżny szereg harmoniczny rzędu 2), więc na podstawie twierdzenia 3.1.2 i kryterium porównawczego zbieży jest też szereg dany w zadaniu.

3.73.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2+n}-n)}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n^2+n}-n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n[(\sqrt{n^2+n})^2-n^2]}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n}{n(n^2+n-n^2)}=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}{n\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{n}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Ponieważ po prawej stronie mamy szereg harmoniczny rzędu 1, który jest rozbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.74.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-n)}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}+n}{n(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-n)(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}\sqrt{n}}+n}{n[(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}})^2-n^2]}=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+n}{n(n^2+n\sqrt{n}-n^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+1}{n\sqrt{n}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+1}+1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $(bo\ \sqrt{\frac{1}{n}}\leqslant 1)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}+1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Ponieważ po prawej stronie mamy iloczyn stałej $\sqrt{2}+1$ przez szereg harmoniczny rzędu $\frac{3}{2}$, który jest zbieżny, więc na mocy twierdzenia 3.1.2 i kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.75.

$\sum_{n=1}^{\infty}((\sqrt[3]{8n^3+2n}-2n)sin\frac{1}{n})$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych (bo $\sqrt[3]{8n^3+2n}>2n$, oraz $sin\frac{1}{n}$ dąży do zera z prawej strony).

Przekształćmy szereg korzystając z wzoru:

$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}((\sqrt[3]{8n^3+2n}-2n)sin\frac{1}{n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt[3]{8n^3+2n})^3-(2n)^3}{(\sqrt[3]{8n^3+2n})^2+\sqrt[3]{8n^3+2n}\cdot 2n+(2n)^2}\cdot sin\frac{1}{n}=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8n^3+2n)-8n^3}{(\sqrt[3]{n^3(8+\frac{2n}{n^3})})^2+2n\cdot\sqrt[3]{n^3(8+\frac{2n}{n^3})}+4n^2}\cdot sin\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot sin\frac{1}{n}}{n^2\cdot(\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}})^2+2n\cdot n\cdot\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}}+4n^2}=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot sin\frac{1}{n}}{n^2\cdot(\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}})^2+2n^2\cdot\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}}+4n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot sin\frac{1}{n}}{n\cdot(\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}})^2+2n\cdot\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}}+4n}<$ (korzystając z wzoru
$sinx<x$ dla $x\in(0;\frac{\pi}{2})$) $<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{n}}{n\cdot(\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}})^2+2n\cdot\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}}+4n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\cdot[(\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}})^2+2\cdot\sqrt[3]{8+\frac{2}{n^2}}+4]}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$

Ponieważ po prawej stronie mamy iloczyn stałej 2 przez szereg harmoniczny rzędu 2, który jest zbieżny, więc na mocy twierdzenia 3.1.2 i kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.76.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+...+n}{n^3} = 1 + \frac{1+2}{2^3} + \frac{1+2+3}{3^3} + ... + \frac{1+2+...+n}{n^3} + ...$

Przekształćmy szereg korzystając z wzoru:

$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

udowodnionego w zadaniu 1.59.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+...+n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$

Ponieważ po prawej stronie mamy iloczyn stałej $\frac{1}{2}$ przez szereg harmoniczny rzędu 1, który jest rozbieżny, więc na mocy twierdzenia 3.1.2 i kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny