3.77.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3-(-1)^n}{2n}=\frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{2}{2k-1}-\frac{1}{2k}+...$

Zadanie to jest już rozwiązane w odpowiedziach, ale gwoli kompletności zamieszczam rozwiązanie w tym poradniku.

Jest to szerego przemienny (bo ułamek jest zawsze dodatni i znak całego wyrażenia zależy od potęgi liczby -1). Ponadto wyraz ogólny tego szeregu dąży do 0:

$lim_{n\to\infty}u_n=lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3-(-1)^n}{2n}=0$

bo mianownik dąży do ∞ a licznik jest równy 2 lub 4. Natomiast $(-1)^{n+1}$ powoduje, że wyraz ogólny u_n dąży do 0 zarówno z lewej jak i z prawej strony.

Zatem warunek konieczny zbieżności szeregu jest spełniony. Tym samym jest spełniony drugi warunek kryterium Leibniza (3.3.1). Sprawdźmy, czy spełniony jest pierwszy warunek tego kryterium.

$|u_{n+1}|\leqslant|u_n|$

Dla n parzystego mamy:

$|u_{n+1}|-|u_n|=\frac{3-(-1)^{n+1}}{2(n+1)}-\frac{3-(-1)^n}{2n}=\frac{3-(-1)}{2(n+1)}-\frac{3-1}{2n}=\frac{3+1}{2(n+1)}-\frac{2}{2n}=\frac{4}{2(n+1)}-\frac{1}{n}=\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{2n-(n+1)}{(n+1)n}=$
$\frac{n-1}{n(n+1)}>0$ bo $n\geqslant 2 \quad \Rightarrow |u_{n+1}|>|u_n|$

Dla n nieparzystego mamy:

$|u_{n+1}|-|u_n|=\frac{3-(-1)^{n+1}}{2(n+1)}-\frac{3-(-1)^n}{2n}=\frac{3-1}{2(n+1)}-\frac{3-(-1)}{2n}=\frac{2}{2(n+1)}-\frac{4}{2n}=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}=\frac{n-2(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-n-2}{n(n+1)}=$
$-\frac{n+2}{n(n+1)}<0$ bo $n\geqslant 1 \quad \Rightarrow |u_{n+1}|<|u_n|$

Czyli pierwszy warunek kryterium Leibniza nie jest spełniony.

Zauważmy jednak, że:

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2\cdot 2n}{(2n-1)\cdot 2n}-\frac{2n-1}{(2n-1)\cdot 2n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-2n+1}{2n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n(2n-1)}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n(2n-1)}=$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$

Po prawej stronie mamy szereg rozbieżny (jako iloczyn stałej $\frac{1}{2}$ przez rozbieżny szereg harmoniczny rzędu 1). Zatem na mocy twierdzenia 3.1.2 i kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.78.

$\sum_{n=1}^{\infty} sin(n+\frac{1}{n})\pi$

Przekształćmy powyższy szereg korzystając z wzoru:

$sin(\alpha+\beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$

$\sum_{n=1}^{\infty} sin(n+\frac{1}{n})\pi = \sum_{n=1}^{\infty} sin(n\pi+\frac{\pi}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(sin(n\pi)\cdot cos\frac{\pi}{n} + cos(n\pi)\cdot sin\frac{\pi}{n}) =$

$\sum_{n=1}^{\infty}(0\cdot cos\frac{\pi}{n} + (-1)^n \cdot sin\frac{\pi}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot sin\frac{\pi}{n}$

Ponieważ w przedziale $< 0; \pi >$ funkcja $sinx$ jest nieujemna,więc mamy do czynienia z szeregiem przemiennym. Ponadto $lim_{n\to\infty} sin\frac{\pi}{n} = 0$, bo kąt $\frac{\pi}{n}$ wraz ze wzrostem n dąży do 0. Zatem warunek konieczny zbieżności szeregu oraz drugi warunek kryterium Leibniza (3.3.1) jest spełniony.

Sprawdźmy, czy spełniony jest pierwszy warunek tego kryterium:

$|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$

$|u_{n+1}| - |u_n| = |(-1)^{n+1} \cdot sin\frac{\pi}{n+1}| - |(-1)^n \cdot sin\frac{\pi}{n}| = sin\frac{\pi}{n+1} - sin\frac{\pi}{n}$

Dla $n \geqslant 2$ oba kąty należą do pierwszej ćwiartki: $(0; \frac{\pi}{2})$, w której funkcja $sinx$ jest rosnąca. Zatem $sin\frac{\pi}{n+1} < sin\frac{\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad |u_{n+1}| < |u_n|$ a więc tym bardziej $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$.

Oba warunki kryterium Leibniza są spełnione a więc szereg dany w zadaniu jest na mocy tego kryterium zbieżny.

3.79.

$\sum_{n=1}^{\infty} sin2(n+\frac{1}{n})\pi$

Przekształćmy ten szereg następująco:

$\sum_{n=1}^{\infty} sin2(n+\frac{1}{n})\pi = \sum_{n=1}^{\infty} sin(2\pi n+\frac{2\pi}{n}) =$ (na podstawie okresowości funkcji sinus) $= \sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{2\pi}{n} =$
$0 + sin\frac{2}{3}\pi + 1 + \sum_{n=5}^{\infty} sin\frac{2\pi}{n} \qquad (1)$

Podstawmy $a = sin\frac{2}{3}\pi + 1 = const$:

$(1) = a + \sum_{n=5}^{\infty} sin\frac{2\pi}{n}$

Ponieważ dla $n \geqslant 5$ kąt $\frac{2\pi}{n}$ należy do pierwszej ćwiartki $(0; \frac{\pi}{2})$, w której funkcja sinus jest rosnąca, więc mamy:

$$a + \sum_{n=5}^{\infty} sin\frac{2\pi}{n} > a + \sum_{n=5}^{\infty} sin\frac{1}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=5}^{\infty} sin\frac{2\pi}{n} > \sum_{n=5}^{\infty} sin\frac{1}{n}$$

Ale po prawej stronie mamy szereg rozbieżny, co zostało pokazane w zadaniu 3.10., zatem na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest rozbieżny.

3.80.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{logn}}$

Z definicji logarytmu mamy:

$logb = c \quad \Leftrightarrow \quad 10^c = b$

$\Downarrow$

$10^{logb} = b \qquad\qquad (1)$

oraz

$loga = d \quad \Leftrightarrow \quad 10^d = a$

$\Downarrow$

$10^{loga} = a \qquad\qquad (2)$

Przekształćmy tożsamości (1) i (2) następująco:

$a = 10^{loga} \quad /^{logb}$	$b = 10^{logb} \quad /^{loga}$
$a^{logb} = (10^{loga})^{logb}$	$b^{loga} = (10^{logb})^{loga}$
$a^{logb} = 10^{loga \cdot logb}$	$b^{loga} = 10^{logb \cdot loga}$

Z powyższych dwóch równości wynika, że:

$a^{logb} = b^{loga} \qquad (3)$

Korzystając z wzoru (3) przekształćmy szereg dany w zadaniu następująco:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{logn}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{loga}}$

Powyższy szereg jest szeregiem harmonicznym o stopniu zależnym od wartości a. Jest on zbieżny gdy:

$loga > 1$

$\Updownarrow$

$a > 10$

Czyli dla $a > 10$ szereg dany w zadaniu jest zbieżny, natomiast dla $a \in (0; 10 >$ jest on rozbieżny.

3.81.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych. Zbadajmy dla jakich wartości $\alpha > 1$ zachodzi nierówność:

$\frac{1}{3^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{n^{\alpha}}$ (1)

$\Updownarrow$

$n^{\alpha} < 3^{\sqrt{n}} \quad /log$

$logn^{\alpha} < log3^{\sqrt{n}}$

$\alpha logn < \sqrt{n}log3 \quad / : log3$

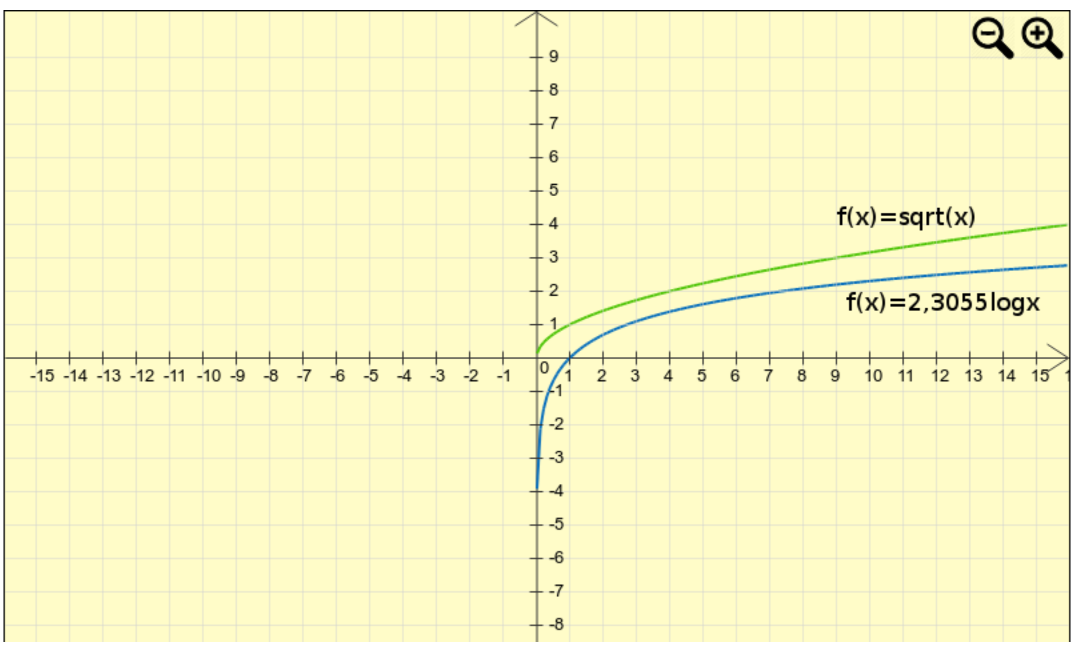
$\frac{\alpha}{log3} logn < \sqrt{n}$

Do rozwiązania zadania posłużmy się wykresem. Weźmy dla przykładu $\alpha = 1,1$. Wykres obu funkcji:

$f_1(x) = \frac{1,1}{log3} logx \approx \frac{1,1}{0,4771} logx \approx 2,3055 \cdot logx$

$f_2(x) = \sqrt{x}$

wygląda następująco:

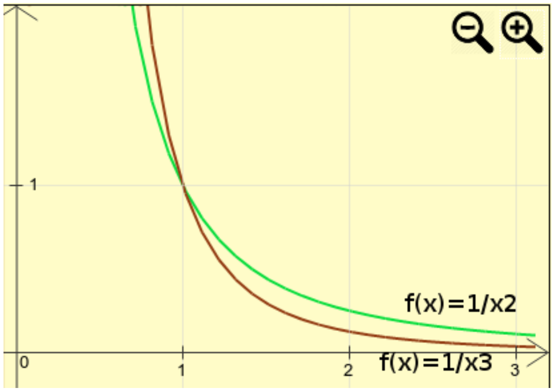


Widzimy, że wykres funkcji $f_1(x) = 2,3055 \cdot logx$ dla każdego x jest poniżej wykresu $f_2(x) = \sqrt{x}$.

Zatem dla $\alpha = 1,1$ nierówność (1) jest spełniona i tym samym zachodzi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

A ponieważ po prawej stronie mamy szereg harmoniczny rzędu $1,1$, który jest zbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego szereg dany w zadaniu jest zbieżny.

3.82.



Krzywe $\frac{1}{x^2}$ i $\frac{1}{x^3}$ przecinają się tylko w punkcie $(1,1)$. Na prawo od tego punktu wartości krzywej $\frac{1}{x^2}$ są większe od odpowiadających im wartościom krzywej $\frac{1}{x^3}$. Zatem długość wybranego odcinka w punkcie x między tymi krzywymi wynosi $u = \frac{1}{x^2}$-$\frac{1}{x^3}$.

Niech teraz $a \in R_+$ oznacza odległość między poprowadzonymi odcinkami. Pierwszy odcinek będzie więc w punkcie $1+a$, drugi w punkcie $1+a+a=1+2a$, trzeci w $1+a+a+a=1+3a$, itd.

Zatem długości kolejnych odcinków wynoszą:

$u_1 = \frac{1}{(1+a)^2} - \frac{1}{(1+a)^3}$

$u_2 = \frac{1}{(1+2a)^2} - \frac{1}{(1+2a)^3}$

$u_3 = \frac{1}{(1+3a)^2} - \frac{1}{(1+3a)^3}$

i ogólnie:

$u_n = \frac{1}{(1+na)^2} - \frac{1}{(1+na)^3}$

natomiast suma długości tych odcinków tworzy szereg liczbowy nieskończony:

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(1+na)^2} - \frac{1}{(1+na)^3}) \qquad (1)$

suma ta będzie skończona jeśli powyższy szereg jest zbieżny. Zbadajmy więc jego zbieżność.

Jest to szereg o wyrazach nieujemnych, którego wyraz ogólny dąży do 0, bo:

$lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+na)^2} - lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+na)^3} = 0 - 0 = 0$

Czyli warunek zbieżności szeregu jest spełniony. Przeształćmy teraz ten szereg następująco:

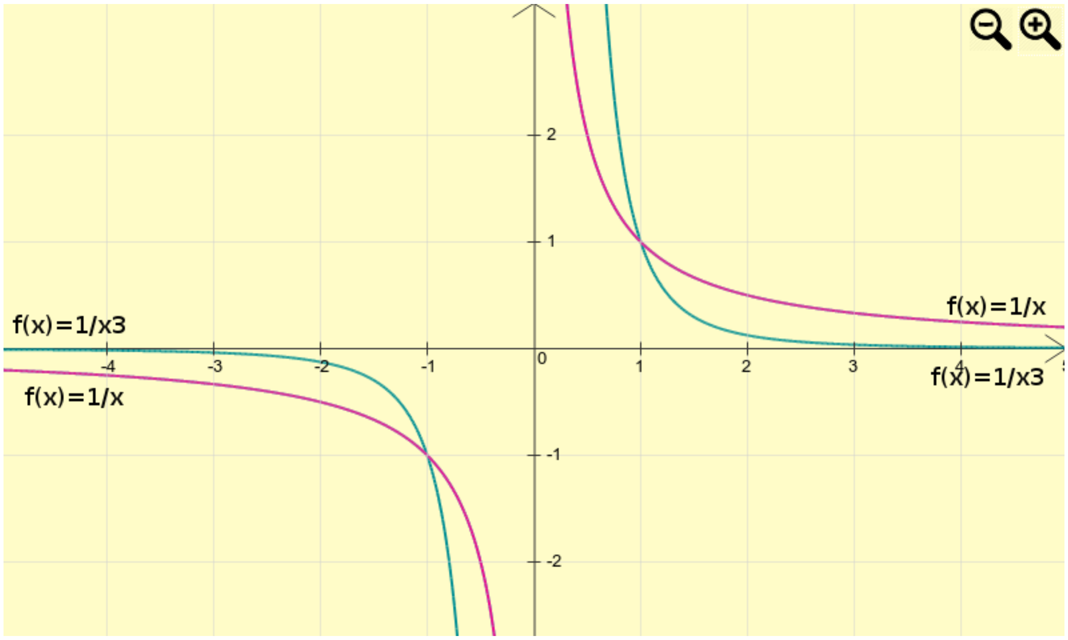
$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(1+na)^2} - \frac{1}{(1+na)^3}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+na)-1}{(1+na)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na}{(1+na)^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na}{(na)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(na)^2} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{n^2}$

Po prawej stronie mamy mnożenie stałej $\frac{1}{a^2}$ przez szereg harmoniczny rzędu 2, który jest zbieżny. Zatem na mocy twierdzenia 3.1.2 i kryterium porównawczego szereg (1) jest zbieżny.

A tym samym suma długości odcinków danych w zadaniu jest skończona.

3.83.



Zadanie to jest analogiczne do poprzedniego z tą różnicą, że mamy tu krzywe $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{x^3}$, które przecinają się w dwóch punktach (-1, -1) oraz (1,1).

Suma odcinków poprowadzonych na prawo od punktu (1,1) tworzy szereg liczbowy nieskończony:

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+na} - \frac{1}{(1+na)^3})$ (1)

Przekształćmy teraz ten szereg następująco:

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+na} - \frac{1}{(1+na)^3}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+na)^2-1}{(1+na)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2na+(na)^2-1}{(1+na)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na(2+na)}{(1+na)^3} > const + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{na(2+na)}{(na+na)^3}$

W ostatniej nierówności mamy pewną stałą przed sumą oraz współczynnik p, które zależą od wartości wybranej liczby a. Żeby bowiem ta nierówność była prawdziwa musi zachodzić $na > 1$.

Przekształćmy szereg dalej:

$const + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{na(2+na)}{(na+na)^3} = const + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{na(2+na)}{(2na)^3} = const + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{na(2+na)}{8(na)^3} = const + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{2+na}{8(na)^2} >$
$> const + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{na}{8(na)^2} = const + \sum_{n=p}^{\infty}(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{na}) = const + \sum_{n=p}^{\infty}(\frac{1}{8a} \cdot \frac{1}{n})$

Po prawej stronie mamy iloczyn stałej $\frac{1}{8a}$ przez szereg harmoniczny rzędu 1, który jest rozbieżny.

Zatem na mocy twierdzenia 3.1.2 i kryterium porównawczego szereg (1) jest rozbieżny.

Czyli ostatecznie suma długości poprowadzonych odcinków jest nieskończona - tym bardziej gdyby dodać do niej długości odcinków poprowadzonych w 3 ćwiartce (na prawo od punktu (-1, -1)).

3.84.

Szereg dany w zadaniu składa się z następujących wyrazów:

$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$

gdzie:

$u_1 = \frac{1}{10}$

$u_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

$u_3 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$

...

$u_n = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot ... \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10^n}$

Widzimy, że jest to szereg geometryczny, w którym:

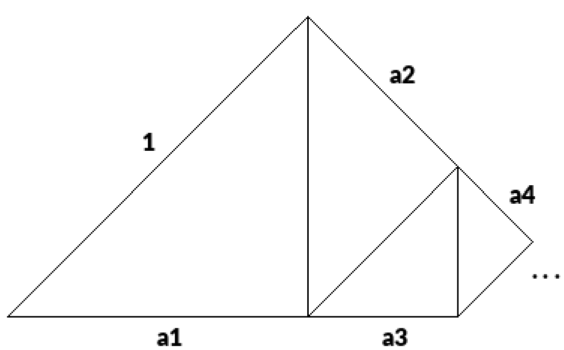
$a = \frac{1}{10}$ i $q = \frac{1}{10}$

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \cdot (\frac{1}{10})^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{10})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

Zatem jego suma wynosi:

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9}$

3.85.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$(a_1)^2 + (a_1)^2 = 1$

$2(a_1)^2 = 1$

$(a_1)^2 = \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, bo $a_1 > 0$

$(a_2)^2 + (a_2)^2 = (a_1)^2$

$2(a_2)^2 = \frac{1}{2}$

$(a_2)^2 = \frac{1}{4}$

$a_2 = \frac{1}{2}$, bo $a_2 > 0$

$(a_3)^2 + (a_3)^2 = (a_2)^2$

$2(a_3)^2 = \frac{1}{4}$

$(a_3)^2 = \frac{1}{8}$

$a_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, bo $a_3 > 0$

$(a_4)^2 + (a_4)^2 = (a_3)^2$

$2(a_4)^2 = \frac{1}{8}$

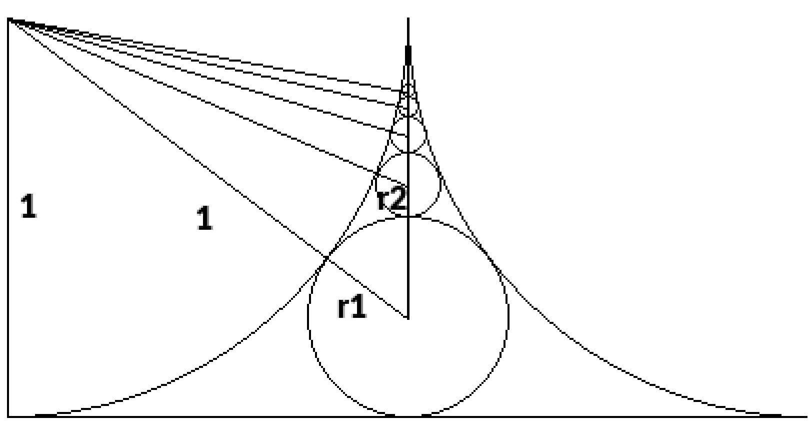
$(a_4)^2 = \frac{1}{16}$

$a_4 = \frac{1}{4}$, bo $a_4 > 0$

Widzimy więc, że szereg określony w zadaniu wygląda następująco:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + ... = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + ...$
Zatem jest to szereg geometryczny, w którym $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ponieważ $\sqrt{2} > 1$, więc $|q| = |\frac{1}{\sqrt{2}}| < 1$ a tym samym powyższy szereg geometryczny jest zbieżny.

3.86.



Przez r_n, gdzie $n \geqslant 1 \wedge n \in N$ oznaczmy długości promieni kolejnych okręgów wpisanych tworzących ten ciąg. Przy czym r_1 oznacza promień największego, r_2 promień stycznego do niego od góry w pionie itd.

Zgodnie z danymi w zadaniu mamy:

$2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + ... + 2r_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} = 2r_n = 1$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$(1 + r_1)^2 = 1^2 + (1 - r_1)^2$

$1 + 2r_1 + {r_1}^2 = 1 + 1 - 2r_1 + {r_1}^2$

$4r_1 = 1$

$r_1 = \frac{1}{4}$

Dalej zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa:

$(1 + r_2)^2 = 1^2 + (1 - 2r_1 - r_2)^2$

$1 + 2r_2 + {r_2}^2 = 1 + (1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - r_2)^2$

$1 + 2r_2 + {r_2}^2 = 1 + (1 - \frac{1}{2} - r_2)^2$

$1 + 2r_2 + {r_2}^2 = 1 + (\frac{1}{2} - r_2)^2$

$1 + 2r_2 + {r_2}^2 = 1 + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2}r_2 + {r_2}^2$

$1 + 2r_2 = \frac{5}{4} - r_2$

$3r_2 = \frac{1}{4}$

$r_2 = \frac{1}{12}$

I dalej:

$(1 + r_3)^2 = 1^2 + (1 - 2r_1 - 2r_2 - r_3)^2$

$(1 + r_3)^2 = 1 + (1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{12} - r_3)^2$

$1 + 2r_3 + {r_3}^2 = 1 + (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - r_3)^2$

$1 + 2r_3 + {r_3}^2 = 1 + (\frac{6-3-1}{6} - r_3)^2$

$1 + 2r_3 + {r_3}^2 = 1 + (\frac{1}{3})^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}r_3 + {r_3}^2$

$2r_3 + \frac{2}{3}r_3 = \frac{1}{9}$

$\frac{8}{3}r_3 = \frac{1}{9}$

$r_3 = \frac{1}{24}$

oraz:

$(1 + r_4)^2 = 1^2 + (1 - 2r_1 - 2r_2 - 2r_3 - r_4)^2$

$(1 + r_4)^2 = 1 + (1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{12} - 2 \cdot \frac{1}{24} - r_4)^2$

$1 + 2r_4 + {r_4}^2 = 1 + (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - r_4)^2$

$1 + 2r_4 + {r_4}^2 = 1 + (\frac{12-6-2-1}{12} - r_4)^2$

$1 + 2r_4 + {r_4}^2 = 1 + (\frac{3}{12})^2 - 2 \cdot \frac{3}{12} r_4 + {r_4}^2$

$1 + 2r_4 + {r_4}^2 = 1 + (\frac{1}{4})^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} r_4 + {r_4}^2$

$2r_4 = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} r_4$

$\frac{5}{2} r_4 = \frac{1}{16}$

$r_4 = \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{5}$

$r_4 = \frac{1}{40}$

Mamy więc:

$2r_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}$

$2r_2 = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

$2r_3 = 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$

$2r_4 = 2 \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$

i ogólnie:

$2r_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$

Czyli szereg dany w zadaniu wygląda następująco:

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$