**5.19.**

$lim_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x+2}$

$f(x) = \frac{x^2+4}{x+2}$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną, która jest ciągła dla wszystkich x, dla których mianownik jest różny od zera, czyli dla:

$x + 2 \neq 0$

$x \neq -2$

Zatem w punkcie $x = 2$ funkcja ta jest określona i ciągła. Z definicji ciągłości obliczamy granicę:

$lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{2^2+4}{2+2} = \frac{4+4}{4} = 2$

**5.20.**

$lim_{x \to 2} \frac{x^2-1}{x-2}$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-2}$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla wartości $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Zapiszmy ją następująco:

$f(x) = (x-1)(x+1) \cdot \frac{1}{x-2} = g(x) \cdot h(x)$, gdzie:

$g(x) = (x-1)(x+1)$, oraz

$h(x) = \frac{1}{x-2}$

$g(x)$ jest wielomianem, więc jest ciągła dla wszystkich wartości $x$. Zatem:

$lim_{x \to 2} g(x) = g(2) = (2-1)(2+1) = 3$

Natomiast funkcja $h(x)$ nie jest określona w punkcie $x = 2$ a tym samym nie jest ciągła w tym punkcie. Jej granica lewostronna i prawostronna w punkcie $x = 2$ wynoszą odpowiednio:

$lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$ (bo dzielimy 1 przez dowolnie małą liczbę ujemną)

$lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$(bo dzielimy 1 przez dowolnie małą liczbę dodatnią)

Zatem:

$lim_{x \to 2-0} f(x) = lim_{x \to 2-0} g(x) \cdot lim_{x \to 2-0} h(x) = 3 \cdot (-\infty) = -\infty$

$lim_{x \to 2+0} f(x) = lim_{x \to 2+0} g(x) \cdot lim_{x \to 2+0} h(x) = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$

Uwaga!

W zadaniu podana jest nieprawidłowa odpowiedź. Byłaby ona poprawna gdyby funkcja $f(x)$

była określona wzorem:

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Jest ona określona również dla $x \neq 2$. Przekształćmy ją następująco:

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = (x+2) \cdot \frac{x-2}{x-2} = g(x) \cdot h(x)$

gdzie:

$g(x) = x + 2$

$h(x) = \frac{x-2}{x-2}$

Funkcja $g(x)$ jest określona dla $x \in R$ i jako wielomian pierwszego stopnia jest ciągła w tym zbiorze. Zatem:

$lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = 2 + 2 = 4$

Funkcja $h(x)$ jest określona dla $x \in R \backslash 2$ i jest nieciągła dla $x = 2$. Dla wszystkich pozostałych wartości z dziedziny jej wartość jest równa 1. Z tego i z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że:

$lim_{x\to 2-0} h(x) = 1$ oraz $lim_{x\to 2+0} h(x) = 1$

A zatem granica funkcji $h(x)$ w punkcie $x = 2$ istnieje i wynosi 1:

$lim_{x\to 2} h(x) = 1$

Ostatecznie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x\to 2} f(x) = lim_{x\to 2} g(x) \cdot lim_{x\to 2} h(x) = 4 \cdot 1 = 4$

**5.21.**

$lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x+1}$

$f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+1}$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla: $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$.

Zatem w punkcie $x = -\frac{1}{2}$ jest ona nieciągła. Przekształćmy ją następująco:

$f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+1} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x+1} = (2x-1) \cdot \frac{2x+1}{2x+1} = g(x) \cdot h(x)$, gdzie:

$g(x) = (2x - 1)$, oraz

$h(x) = \frac{2x+1}{2x+1}$

Funkcja $g(x)$ jako wielomian stopnia pierwszego jest funkcją ciągłą dla wszystkich wartości $x$.

Zatem jej granica w punkcie $x = -\frac{1}{2}$ istnieje i wynosi:

$lim_{x\to-\frac{1}{2}}g(x) = g(-\frac{1}{2}) = 2\cdot(-\frac{1}{2}) - 1 = -1 - 1 = -2$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest określona dla $x \in R\backslash\{-\frac{1}{2}\}$ i dla każdej wartości z dziedziny jej wartość wynosi 1. Z tego i z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że:

$lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}h(x) = 1$ oraz $lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}h(x) = 1$

A zatem granica funkcji $h(x)$ w punkcie $x = -\frac{1}{2}$ istnieje i wynosi 1:

$lim_{x\to-\frac{1}{2}}h(x) = 1$

Ostatecznie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x\to-\frac{1}{2}}f(x) = lim_{x\to-\frac{1}{2}}g(x)\cdot lim_{x\to-\frac{1}{2}}h(x) = -2\cdot 1 = -2$

**5.22.**

$lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

$f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Zatem w punkcie $x = 2$ jest ona nieciągła. Przekształćmy ją następująco korzystając z wzoru $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{x^3-2^3}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{x-2} = (x^2+2x+2^2)\cdot\frac{x-2}{x-2} = g(x)\cdot h(x)$, gdzie:

$g(x) = x^2 + 2x + 2^2 = x^2 + 2x + 4$, oraz

$h(x) = \frac{x-2}{x-2}$

Funkcja $g(x)$ jako wielomian stopnia drugiego jest funkcją ciągłą dla wszystkich liczb rzeczywistych w tym dla wartości $x = 2$. Zatem jej granica w tym punkcie istnieje i wynosi:

$lim_{x\to 2}g(x) = g(2) = 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest określona dla wartości $x \in R\backslash\{2\}$ i dla wszystkich tych wartości przyjmuje wartość funkcji równą 1. Z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że obie te granice w punkcie $x = 2$ wynoszą:

$lim_{x\to 2-0}h(x) = 1$ oraz $lim_{x\to 2+0}h(x) = 1$

A zatem granica funkcji $h(x)$ w punkcie $x = 2$ istnieje i wynosi 1:

$lim_{x\to 2}h(x) = 1$

Ostatecznie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x\to 2}f(x) = lim_{x\to 2}g(x)\cdot lim_{x\to 2}h(x) = 12\cdot 1 = 12$

**5.23.**

$lim_{x\to 3}\frac{27-x^3}{x-3}$

$f(x)=\frac{27-x^3}{x-3}$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla: $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$. Jest więc w punkcie $x=3$ nieciągła. Przekształćmy ją następująco korzystając z wzoru $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$f(x)=\frac{27-x^3}{x-3}=\frac{3^3-x^3}{x-3}=\frac{(3-x)(3^2+3x+x^2)}{x-3}=-(3^2+3x+x^2)\cdot\frac{x-3}{x-3}=g(x)\cdot h(x)$, gdzie:

$g(x)=-(3^2+3x+x^2)=-(9+3x+x^2)$, oraz

$h(x)=\frac{x-3}{x-3}$

Funkcja $g(x)$ jako wielomian stopnia drugiego jest funkcją ciągłą dla wszystkich liczb rzeczywistych w tym dla wartości $x=3$. Zatem jej granica w tym punkcie istnieje i wynosi:

$lim_{x\to 3}g(x)=g(3)=-(9+3\cdot 3+3^2)=-9-9-9=-27$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest określona dla wartości $x\in R\backslash\{3\}$ i dla wszystkich tych wartości przyjmuje wartość funkcji równą 1. Z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że obie te granice w punkcie $x=3$ wynoszą:

$lim_{x\to 3-0}h(x)=1$ oraz $lim_{x\to 3+0}h(x)=1$

A zatem granica funkcji $h(x)$ w punkcie $x=3$ istnieje i wynosi 1:

$lim_{x\to 3}h(x)=1$

Ostatecznie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x\to 3}f(x)=lim_{x\to 3}g(x)\cdot lim_{x\to 3}h(x)=-27\cdot 1=-27$

**5.24.**

$lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6}$

$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{2x-6}$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla: $2x-6\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq 6\Leftrightarrow x\neq 3$, jest więc w punkcie $x=3$ nieciągła. Zauważmy, że $x=3$ jest także miejscem zerowym trójmianu kwadratowego w liczniku. Rozłóżmy go więc na czynniki korzystając z wzoru:

$a(x-x_0)(x-x_1)=x^2-4x+3$

ale $a=1$ oraz $x_0=3$, więc mamy:

$(x-3)(x-x_1)=x^2-4x+3$

Ponadto zachodzi:

$x_0 \cdot x_1 = \frac{3}{a}$

$\Updownarrow$

$3 \cdot x_1 = 3$

$\Updownarrow$

$x_1 = 1$

Zatem:

$(x-3)(x-1) = x^2 - 4x + 3$

Funkcja $f(x)$ przyjmuje więc postać:

$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{2(x-3)} = \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-3}{x-3} = g(x) \cdot h(x)$, gdzie:

$g(x) = \frac{x-1}{2}$, oraz

$h(x) = \frac{x-3}{x-3}$

Funkcja $g(x)$ jako wielomian stopnia pierwszego jest funkcją ciągłą dla wszystkich liczb rzeczywistych w tym dla $x = 3$. Zatem jej granica w tym punkcie istnieje i wynosi:

$lim_{x \to 3} g(x) = g(3) = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest określona dla wartości $x \in R \backslash \{3\}$ i dla wszystkich tych wartości przyjmuje wartość funkcji równą 1. Z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że obie te granice w punkcie $x = 3$ wynoszą:

$lim_{x \to 3-0} h(x) = 1$ oraz $lim_{x \to 3+0} h(x) = 1$

A zatem granica funkcji $h(x)$ w punkcie $x = 3$ istnieje i wynosi 1:

$lim_{x \to 3} h(x) = 1$

Ostatecznie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x \to 3} f(x) = lim_{x \to 3} g(x) \cdot lim_{x \to 3} h(x) = 1 \cdot 1 = 1$

**5.25.**

$lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, jest więc w punkcie $x = 3$ nieciągła. Przekształćmy ją następująco:

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = (x-1) \cdot \frac{x+1}{x+1} = g(x) \cdot h(x)$, gdzie:

$g(x) = x - 1$, oraz

$h(x) = \frac{x+1}{x+1}$

Fukcja $g(x)$ jest wielomianem stopnia pierwszego (funkcją liniową) a więc jest ciągła dla wszystkich liczb rzeczywistych. Jej granica w punkcie $x = -1$ wynosi więc:

$lim_{x \to -1} g(x) = g(-1) = -1 - 1 = -2$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest określona dla wartości $x \in R \backslash \{-1\}$ i w całej swojej dziedzinie przyjmuje wartość funkcji równą 1. Z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że obie te granice w punkcie $x = -1$ wynoszą:

$lim_{x \to -1-0} h(x) = 1$ oraz $lim_{x \to -1+0} h(x) = 1$

A zatem granica funkcji $h(x)$ w punkcie $x = -1$ istnieje i wynosi 1:

$lim_{x \to -1} h(x) = 1$

Ostatecznie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x \to -1} f(x) = lim_{x \to -1} g(x) \cdot lim_{x \to -1} h(x) = -2 \cdot 1 = -2$

(W książce jest błędna odpowiedź)

**5.26.**

$lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^5+32}$

$f(x) = \frac{x+2}{x^5+32}$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla:

$x^5 + 32 \neq 0 \Leftrightarrow x^5 + 2^5 \neq 0 \Leftrightarrow x^5 \neq -2^5 \Leftrightarrow x \neq -2$, jest więc w punkcie $x = -2$ nieciągła.

Przekształćmy ją następująco:

$f(x) = \frac{x+2}{x^5+32} = \frac{x+2}{x^5+2^5}$

Ponieważ $x = -2$ jest miejscem zerowym mianownika, więc jeden z jego czynników ma wartość:

$(x - (-2)) = (x + 2)$

i cały wielomian w mianowniku możemy zapisać jako iloczyn powyższego czynnika przez wielomian stopnia o jeden mniejszego (4-tego):

$x^5 + 2^5 = (x+2)(x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 2^4) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + 2^4 \cdot x + 2x^4 + 2bx^3 + 2cx^2 +$

$+ 2dx + 2^5 = x^5 + 2^5 + (b+2)x^4 + (2b+c)x^3 + (2c+d)x^2 + (2d+2^4)x$

Żeby powyższa równość była prawziwa, wszystkie współczynniki przy potęgach $x$ (czwartej, trzeciej, drugiej i pierwszej) muszą być równe 0:

$b+2=0 \qquad \wedge \qquad 2b+c=0 \qquad \wedge \qquad 2c+d=0 \qquad \wedge \qquad 2d+2^4=0$

$b=-2$

$2\cdot(-2)+c=0$

$c=4$

$2\cdot 4+d=0$

$d=-8$

$2\cdot(-8)+2^4=0$

$-16+16=0$

$0=0$

Ostatecznie wyrażenie $x^5+2^5=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+2^4)$ i tym samym funkcja f(x) przyjmuje postać:

$f(x)=\frac{x+2}{x^5+2^5}=\frac{x+2}{(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+2^4)}=\frac{1}{x^4-2x^3+4x^2-8x+2^4}\cdot\frac{x+2}{x+2}=g(x)\cdot h(x)$

gdzie

$g(x)=\frac{1}{x^4-2x^3+4x^2-8x+2^4}$

oraz

$h(x)=\frac{x+2}{x+2}$

Funkcja $g(x)$ jest funkcją wymierną. Dla $x=-2$ jest ona określona i ciągła a jej wartość wynosi:

$g(-2)=\frac{1}{(-2)^4-2\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)^2-8\cdot(-2)+2^4}=\frac{1}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{5\cdot 16}=\frac{1}{80}$

Z tego i z definicji ciągłości funkcji granica funkcji $g(x)$ w punkcie $x=-2$ istnieje i jest równa:

$lim_{x\to -2}g(x)=g(-2)=\frac{1}{80}$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest określona dla wartości $x\in R\backslash\{-2\}$ i w całej swojej dziedzinie przyjmuje wartość funkcji równą 1. Z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że obie te granice w punkcie $x=-1$ wynoszą:

$lim_{x\to-2-0}h(x)=1$ oraz $lim_{x\to-2+0}h(x)=1$

A zatem granica funkcji $h(x)$ w punkcie $x=-2$ istnieje i wynosi 1:

$lim_{x\to-2}h(x)=1$

Ostatecznie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x\to-2}f(x)=lim_{x\to-2}g(x)\cdot lim_{x\to-2}h(x)=\frac{1}{80}\cdot 1=\frac{1}{80}$

**5.27.**

$lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$

$f(x)=\frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}=\frac{L}{M}$

Rozłóżmy trójmiany w liczniku i mianowniku na czynniki. W tym celu znajdźmy ich miejsca zerowe:

$\Delta_L=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36$

$\sqrt{\Delta_L}=6$

$x_{L_1}=\frac{-b-\sqrt{\Delta_L}}{2a}$ $\qquad x_{L_2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta_L}}{2a}$

$x_{L_1}=\frac{-(-2)-6}{2\cdot 1}$ $\qquad x_{L_2}=\frac{-(-2)+6}{2\cdot 1}$

$x_{L_1}=\frac{-4}{2}$ $\qquad x_{L_2}=\frac{8}{2}$

$x_{L_1}=-2$ $\qquad x_{L_2}=4$

Czyli licznik możemy zapisać następująco:

$L=(x-4)(x+2)$

Znajdźmy teraz iejsca zerowe mianownika i tym samym określmy dziedzinę funkcji $f(x)$ :

$\Delta_M=b^2-4ac=(-9)^2-4\cdot 1\cdot 20=81-80=1$

$\sqrt{\Delta_M}=1$

$x_{M_1}=\frac{-b-\sqrt{\Delta_M}}{2a}$ $\qquad x_{M_2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta_M}}{2a}$

$x_{M_1}=\frac{-(-9)-1}{2\cdot 1}$ $\qquad x_{M_2}=\frac{-(-9)+1}{2\cdot 1}$

$x_{M_1}=\frac{8}{2}$ $\qquad x_{M_2}=\frac{10}{2}$

$x_{M_1}=4$ $\qquad x_{M_2}=5$

Czyli mianownik możemy zapisać następująco:

$M=(x-5)(x-4)$

A więc $f(x)=\frac{(x+2)(x-4)}{(x-5)(x-4)}$

Jest to funkcja wymierna określona dla $x \in R\backslash\{4,5\}$ i tym samym nieciągła

w rozpatrywanym punkcie $x = 4$. Zapiszmy ją następująco:

$f(x) = \frac{x+2}{x-5} \cdot \frac{x-4}{x-4} = g(x) \cdot h(x)$

gdzie:

$g(x) = \frac{x+2}{x-5}$

oraz

$h(x) = \frac{x-4}{x-4}$

Funkcja $g(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla $x = 4$ i ciągłą w tym punkcie. Jej granica

w punkcie $x = 4$ wynosi:

$lim_{x\to 4} g(x) = g(4) = \frac{4+2}{4-5} = \frac{6}{-1} = -6$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest funkcją wymierną nieokreśloną i nieciągłą w punkcie $x = 4$.

Dla wszystkich pozostałych $x$ jej wartość jest równa 1. Z tego oraz z definicji granicy

lewostronnej i prawostronnej wynika, że obie te granice w punkcie $x = 4$ wynoszą:

$lim_{x\to 4-0} h(x) = 1$ oraz $lim_{x\to 4+0} h(x) = 1$

A zatem granica funkcji $h(x)$ w punkcie $x = 4$ istnieje i wynosi 1:

$lim_{x\to 4} h(x) = 1$

Ostatecznie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x\to 4} f(x) = lim_{x\to 4} g(x) \cdot lim_{x\to 4} h(x) = -6 \cdot 1 = -6$

**5.28.**

$lim_{x\to -5} \frac{x^3+125}{2x^2-50}$

$f(x) = \frac{x^3+125}{2x^2-50}$

$f(x)$ jest to funkcja wymierna określona dla:

$2x^2 - 50 \neq 0$

$2(x^2 - 25) \neq 0$

$2(x-5)(x+5) \neq 0$

$x \neq 5 \quad \wedge \quad x \neq -5$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ korzystając z wzoru:

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$f(x) = \frac{x^3+125}{2x^2-50} = \frac{x^3+5^3}{2(x-5)(x+5)} = \frac{(x+5)(x^2-5x+5^2)}{2(x-5)(x+5)} = \frac{x^2-5x+5^2}{2(x-5)} \cdot \frac{x+5}{x+5} = g(x) \cdot h(x)$

gdzie:

$g(x) = \frac{x^2-5x+5^2}{2(x-5)}$

oraz

$h(x) = \frac{x+5}{x+5}$

Funkcja $g(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla $x \in R \backslash \{5\}$ i ciągłą w całej swojej dziedzinie.

Z tego oraz z definicji ciągłości funkcji wynika, że jej granica w punkcie $x = -5$ wynosi:

$lim_{x \to -5} g(x) = g(-5) = \frac{(-5)^2-5\cdot(-5)+5^2}{2\cdot(-5-5)} = \frac{25+25+25}{2\cdot(-10)} = \frac{75}{-20} = -\frac{15}{4}$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla $x \in R \backslash \{-5\}$ i ciągłą dla wszystkich wartości z dziedziny. Jej wartość dla wszystkich $x \neq -5$ jest równa 1. Z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że obie te granice w punkcie $x = -5$ wynoszą:

$lim_{x \to -5-0} h(x) = 1$ oraz $lim_{x \to -5+0} h(x) = 1$

A zatem granica funkcji $h(x)$ w punkcie $x = -5$ istnieje i wynosi 1:

$lim_{x \to -5} h(x) = 1$

Ostatecznie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x \to -5} f(x) = lim_{x \to -5} g(x) \cdot lim_{x \to -5} h(x) = -\frac{15}{4} \cdot 1 = -\frac{15}{4}$