5.29.

$lim_{x\to-2}\frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$

$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$

f(x) jest funkcją wymierną określoną dla:

$4x^2+9x+2\neq 0$

W celu znalezienia miejsc zerowych mianownika rozłóżmy go na czynniki. Zauważmy też, że $x_1=-2$ jest jednym z miejsc zerowych.

$4x^2+9x+2=4(x-x_1)(x-x_2)=4(x+2)(x-x_2)$

Miejsce zerowe x_2 obliczymy ze wzoru $ax_1x_2=c$:

$4\cdot(-2)\cdot x_2=2$

$-8x_2=2$

$x_2=-\frac{2}{8}$

$x_2=-\frac{1}{4}$

Czyli mamy:

$4(x+2)(x+\frac{1}{4})\neq 0$

$\Updownarrow$

$x\in R\backslash\{-2,-\frac{1}{4}\}$

Zauważmy też, że $x=-2$ jest również miejscem zerowym licznika, zatem:

$3x^2+5x-2=2(x-(-2))(x-x_2)$

Drugie miejsce zerowe obliczymy z tego samego wzoru, z którego korzystaliśmy wyżej:

$3\cdot(-2)\cdot x_2=-2$

$-6x_2=-2$

$x_2=\frac{2}{6}$

$x_2=\frac{1}{3}$

Zatem funkcję f(x) możemy zapisać następująco:

$f(x)=\frac{3(x-\frac{1}{3})(x+2)}{4(x+\frac{1}{4})(x+2)}=\frac{3(x-\frac{1}{3})}{4(x+\frac{1}{4})}\cdot\frac{x+2}{x+2}=g(x)\cdot h(x)$

gdzie:

$g(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{x-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{4}}$

$h(x)=\frac{x+2}{x+2}$

Funkcja $h(x)$ a tym samym $f(x)$ są nieciągłe w punkcie $x=-2$. Dla wszystkich pozostałych x funkcja $h(x)$ jest określona i jej wartość wynosi 1. Z tego oraz

z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej funkcji wynika, że:

$lim_{x\to -2-0}h(x) = 1$ oraz $lim_{x\to -2+0}h(x) = 1$

$\Downarrow$

$lim_{x\to -2}h(x) = 1$

Natomiast funkcja $g(x)$ jest określona i ciągła w punkcie $x = -2$ (jako funkcja

wymierna). Z definicji ciągłości wynika, że:

$lim_{x\to -2}g(x) = g(-2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{-2-\frac{1}{3}}{-2+\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{-\frac{6}{3}-\frac{1}{3}}{-\frac{8}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{7}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{7} = 1$

A więc ostatecznie szukana granica funkcji $f(x)$ w punkcie $x = -2$ wynosi:

$lim_{x\to -2}f(x) = lim_{x\to -2}g(x) \cdot lim_{x\to -2}h(x) = 1 \cdot 1 = 1$

5.30.

$lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$

$f(x) = \frac{x^5-1}{x-1}$

Funkcja $f(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla $x \in R\backslash\{1\}$. Przekształćmy licznik

następująco zauważając, że $x = 1$ jest jego miejscem zerowym:

$x^5 - 1 = (x-1)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e =$

$ax^5 + (b-a)x^4 + (c-b)x^3 + (d-c)x^2 + (e-d)x - e$

Współczynniki a, b, c, d, e wyznaczamy następująco:

$a = 1, \quad b - a = 0, \quad c - b = 0, \quad d - c = 0, \quad e - d = 0$

$b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$

$c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1$

$d - 1 = 0 \Leftrightarrow d = 1$

$e - 1 = 0 \Leftrightarrow e = 1$

Czyli mamy:

$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Funkcję $f(x)$ przedstawmy teraz następująco:

$f(x) = \frac{x^5-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1} = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot \frac{x-1}{x-1} = g(x) \cdot h(x)$

gdzie:

$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$h(x) = \frac{x-1}{x-1}$

Funkcja $g(x)$ jest w punkcie $x = 1$ ciągła, zatem jej granica w tym punkcie wynosi:

$lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 5$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla $x \in R \backslash \{1\}$, ciągłą dla wszystkich wartości z dziedziny i równą 1 dla tychże wartości. Zatem z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej funkcji wynika, że:

$lim_{x\to 1-0} h(x) = 1$ oraz $lim_{x\to 1+0} h(x) = 1$

$\Downarrow$

$lim_{x\to 1} h(x) = 1$

Ostatecznie granica funkcji danej w zadaniu istnieje i wynosi:

$lim_{x\to 1} f(x) = lim_{x\to 1} g(x) \cdot lim_{x\to 1} h(x) = 5 \cdot 1 = 5$

5.31.

$lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x^2-9}$

$f(x) = \frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x^2-9}$

Funkcja $f(x)$ jest określona dla $x \in R \backslash \{-3, 3\}$, gdyż dla tych wartości mianownik jest różny od 0.

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x^2-9} = \frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{(x-3)(x+3)} = \frac{(-1)^{[x]}}{x+3} \cdot \frac{x-3}{x-3} = g(x) \cdot h(x)$

gdzie:

$g(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x+3}$

$h(x) = \frac{x-3}{x-3}$

Funkcja $h(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla $x \in R \backslash \{3\}$. Dla wszystkich wartości z dziedziny jest ciągła i przyjmuje wartość 1. Zatem z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej funkcji wynika, że:

$lim_{x\to 3-0} h(x) = 1$ oraz $lim_{x\to 3+0} h(x) = 1$

$\Downarrow$

$lim_{x\to 3} h(x) = 1$

Znajdźmy teraz granicę funkcji g(x):

$lim_{x\to 3-0} g(x) = lim_{x\to 3-0} \frac{(-1)^{[x]}}{x+3} = lim_{x\to 3-0} \frac{(-1)^2}{x+3} = lim_{x\to 3-0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$
$lim_{x\to 3+0} g(x) = lim_{x\to 3+0} \frac{(-1)^{[x]}}{x+3} = lim_{x\to 3+0} \frac{(-1)^3}{x+3} = lim_{x\to 3+0} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{6}$
Ponieważ granice lewostronna i prawostronna funkcji g(x) w punkcie $x = 3$ są różne, więc granica funkcji w tym punkcie nie istnieje. Tym samym nie istnieje w tym punkcie granica funkcji $f(x)$ danej w zadaniu.

5.32.

$lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$
$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$

Funkcja $f(x)$ jest określona dla:

$x \neq 0 \qquad \wedge \qquad 1 + mx \geqslant 0$

$mx \geqslant -1$

$$\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{m} & dla\, m > 0 \\ x \leqslant -\frac{1}{m} & dla\, m < 0 \end{cases}$$

Dla $m = 0$ funkcja $f(x)$ przybiera postać:

$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+0\cdot x}-1}{x} = \frac{1-1}{x} = \frac{0}{x} = 0$

Zatem granice jednostronne tej funkcji wynoszą:

$lim_{x\to -0} f(x) = 0$ oraz $lim_{x\to +0} f(x) = 0$

$\Downarrow$

$lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Weźmy teraz $m \neq 0$:

$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$

Podstawmy:

$1 + mx = t^3 \quad$ (gdy $x \to 0$, to $t \to 1$)

$mx = t^3 - 1$

$x = \frac{t^3-1}{m}$

$f(t) = \frac{\sqrt[3]{t^3}-1}{\frac{t^3-1}{m}} = \frac{(t-1)\cdot m}{t^3-1}$

Korzystając z wzoru $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, mamy:

$f(t) = \frac{t-1}{t-1} \cdot \frac{m}{t^2+t+1} = g(t) \cdot h(t)$, gdzie:

$g(t) = \frac{t-1}{t-1}$

$h(t) = \frac{m}{t^2+t+1}$

Funkcja $g(t)$ jest określona dla $t \neq 1$ i dla wszystkich wartości t z dziedziny jest ciągła i przyjmuje wartość 1. Zatem z tego i z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że:

$lim_{t\to 1-0} g(t) = 1$ oraz $lim_{t\to 1+0} g(t) = 1$

$\Downarrow$

$lim_{t\to 1} g(t) = 1$

Znajdźmy teraz granicę funkcji $h(t)$ w punkcie $t = 1$. Jest to funkcja wymierna określona dla $t = 1$ i ciągła w tym punkcie, zatem:

$lim_{t\to 1} h(t) = h(1) = \frac{m}{1^2+1+1} = \frac{m}{3}$

A więc:

$lim_{t\to 1} f(t) = lim_{t\to 1} g(t) \cdot lim_{t\to 1} h(t) = 1 \cdot \frac{m}{3} = \frac{1}{3}m$

Ostatecznie:

$lim_{x\to 0} f(x) = lim_{t\to 1} f(t) = \frac{1}{3}m$

5.33.

$lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$, n - liczba naturalna

$f(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$

$f(x)$ jest funkcją wymierną określoną dla $x \in R\backslash\{1\}$. Obliczmy granicę tej funkcji w punkcie $x = 1$ dla kilku początkowych n:

$n = 1$

$f_1(x) = \frac{x-1}{x-1}$

$lim_{x\to 1-0} f_1(x) = 1$ oraz $lim_{x\to 1+0} f_1(x) = 1$

$\Downarrow$

$lim_{x\to 1} f_1(x) = 1$

$n = 2$

$f_2(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} \cdot (x+1) = g_2(x) \cdot h_2(x)$, gdzie:

$g_2(x) = \frac{x-1}{x-1}$

$h_2(x) = x + 1$

$lim_{x\to 1} g_2(x)$= $lim_{x\to 1} f_1(x) = 1$

$lim_{x\to 1} h_2(x)$ =($h_2(x)$ jest funkcją liniową ciągłą dla $x = 1$)= $h_2(1) = 1 + 1 = 2$

A zatem

$lim_{x\to 1} f_2(x) = lim_{x\to 1} g_2(x) \cdot lim_{x\to 1} h_2(x) = 1 \cdot 2 = 2$

$n = 3$

$f_3(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} \cdot (x^2 + x + 1) = g_3(x) \cdot h_3(x)$, gdzie:

$g_3(x) = \frac{x-1}{x-1}$

$h_3(x) = x^2 + x + 1$

$lim_{x\to 1} g_3(x)$= $lim_{x\to 1} f_1(x) = 1$

$lim_{x\to 1} h_3(x)$ =($h_3(x)$ jest wielomianem stopnia 2-go ciągłym dla $x = 1$)= $h_3(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

A zatem

$lim_{x\to 1} f_3(x) = lim_{x\to 1} g_3(x) \cdot lim_{x\to 1} h_3(x) = 1 \cdot 3 = 3$

$n = 4$

$f_4(x) = \frac{x^4-1}{x-1} = \frac{(x^2)^2-1^2}{x-1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} \cdot (x+1)(x^2+1) = g_4(x) \cdot h_4(x)$, gdzie:

$g_4(x) = \frac{x-1}{x-1}$

$h_4(x) = (x + 1)(x^2 + 1) = x^3 + x + x^2 + 1 = x^3 + x^2 + x + 1$

$lim_{x\to 1} g_4(x)$= $lim_{x\to 1} f_1(x) = 1$

$lim_{x\to 1} h_4(x)$ =($h_4(x)$ jest wielomianem stopnia 3-go ciągłym dla $x = 1$)= $h_4(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$

A zatem

$lim_{x\to 1} f_4(x) = lim_{x\to 1} g_4(x) \cdot lim_{x\to 1} h_4(x) = 1 \cdot 4 = 4$

$n = 5$

$f_5(x) = \frac{x^5-1}{x-1}$ =(wzór wyprowadzony w zadaniu 5.30) $= \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}$

$lim_{x \to 1} f_5(x) = 5$ (obliczone w zadaniu 5.30)

Na podstawie powyższych przykładów zauważamy, że:

$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x + 1) \qquad (1)$

Wzór ten udowodnimy przez indukcję. Zakładamy, że prawdziwe jest założenie indukcyjne dla

$k \geqslant 1$ i $k \in N$:

$x^k - 1 = (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + ... + x^2 + x + 1)$

a twierdzimy, że spełniona jest teza indukcyjna:

$x^{k+1} - 1 = (x-1)(x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + ... + x^2 + x + 1) \qquad (2)$

Na podstawie założenia indukcyjnego mamy:

$x^{k-1} + x^{k-2} + ... + x^2 + x + 1 = \frac{x^k - 1}{x-1}$

Zatem rozpatrując równanie (2) mamy:

$P = (x-1)(x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + ... + x^2 + x + 1) = (x-1)[x^k + (x^{k-1} + x^{k-2} + ... + x^2 + x + 1)] =$

$= (x-1)(x^k + \frac{x^k-1}{x-1}) = (x-1)x^k + (x^k - 1) = x^{k+1} - x^k + x^k - 1 = x^{k+1} - 1 = L$

czyli teza indukcyjna jest prawdziwa a tym samym prawdziwy jest rozpatrywany wzór (1).

Obliczmy teraz granicę funkcji $f(x)$:

$f(x) = \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x + 1) = g(x) \cdot h(x)$, gdzie:

$g(x) = \frac{x-1}{x-1}$

$h(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x + 1$

$lim_{x \to 1} g(x) = lim_{x \to 1} f_1(x) = 1$

$lim_{x \to 1} h(x) =$($h(x)$ jest wielomianem stopnia $n-1$ ciągłym dla $x=1$)$= h(1) =$

$1^{n-1} + 1^{n-2} + ... + 1^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + ... + 1 + 1 + 1 =$(jest to suma n jedynek) $= n$

Ostatecznie granica dana w zadaniu wynosi:

$lim_{x \to 1} f(x) = lim_{x \to 1} g(x) \cdot lim_{x \to 1} h(x) = 1 \cdot n = n$

5.34.

$lim_{x \to 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

Funkcja $f(x)$ określona jest dla $x \geqslant 0 \quad \wedge \quad x \neq 25$

Przekształćmy tą funkcję następująco:

$f(x) = \frac{\sqrt{x}-5}{x-25} = \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+5}$

Podstawmy $k = \sqrt{x}$ i zbadajmy granicę w punkcie $k = \sqrt{25} = 5$

$f(k) = \frac{k-5}{k-5} \cdot \frac{1}{k+5}, \qquad k \geqslant 0 \quad \wedge \quad k \neq 5$

$f(k) = g(k) \cdot h(k)$, gdzie

$g(k) = \frac{k-5}{k-5}$

$h(k) = \frac{1}{k+5}$

Funkcja $g(k)$ określona jest dla $k \neq 5$ i dla wszystkich argumentów z dziedziny jest ciągła i przyjmuje wartość 1. Zatem z tego i z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że:

$lim_{k \to 5-0} g(k) = 1$ oraz $lim_{k \to 5+0} g(k) = 1$

$\Downarrow$

$lim_{k \to 5} g(k) = 1$

Funkcja h(k) jest funkcją wymierną, która jest ciągła dla wszystkich argumentów z dziedziny, zatem:

$lim_{k \to 5} h(k) = h(5) = \frac{1}{5+5} = \frac{1}{10}$

Granica funkcji $f(k)$wynosi więc:

$lim_{k \to 5} f(k) = lim_{k \to 5} g(k) \cdot lim_{k \to 5} h(k) = 1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

A tym samym granica szukana w zadaniu wynosi:

$lim_{x \to 25} f(x) = lim_{k \to 5} f(k) = \frac{1}{10}$

5.35.

$lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$

Funkcja $f(x)$ jest określona dla:

$x + 1 \geqslant 0 \qquad \wedge \qquad 1 - \sqrt{x+1} \neq 0$

$x \geqslant -1 \qquad \wedge \qquad \sqrt{x+1} \neq 1$

$x + 1 \neq 1$

$x \neq 0$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1+1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} - \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{1-\sqrt{x+1}} \quad (1)$

Podstawmy $g(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ i zastosujmy wzór $a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ do licznika i mianownika drugiego ułamka:

$(1) = g(x) - (\frac{1^2-\sqrt{x^2+1}^2}{1+\sqrt{x^2+1}} : \frac{1^2-\sqrt{x+1}^2}{1+\sqrt{x+1}}) = g(x) - (\frac{1-x^2-1}{1+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-x-1}) = g(x) - \frac{-x^2\cdot(1+\sqrt{x+1})}{-x\cdot(1+\sqrt{x^2+1})} =$

$= g(x) - \frac{x\cdot(1+\sqrt{x+1})}{1+\sqrt{x^2+1}}$

Zatem $f(x) = g(x) - h(x)$, gdzie:

$h(x) = \frac{x\cdot(1+\sqrt{x+1})}{1+\sqrt{x^2+1}}$

Funkcja $g(x)$ jest określona dla $x \in R\backslash\{0\}$ i dla wszystkich argumentów przyjmuje wartość równą 1.

Zatem z tego i z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że:

$lim_{x\to-0}g(x) = 1$ oraz $lim_{x\to+0}g(x) = 1$

$\Downarrow$

$lim_{x\to0}g(x) = 1$

Natomiast granica funkcji $h(x)$ wynosi:

$lim_{x\to0}h(x) = lim_{x\to0}\frac{x\cdot(1+\sqrt{x+1})}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{0\cdot(1+\sqrt{0+1})}{1+\sqrt{0+1}} = \frac{0\cdot2}{2} = 0$

Czyli ostatecznie szukana granica wynosi:

$lim_{x\to0}f(x) = lim_{x\to0}g(x) - lim_{x\to0}h(x) = 1 - 0 = 1$

5.36.

$lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

Od razu widać, że dziedziną funkcji $f(x)$ jest $R\backslash\{0\}$, bo dla $x = 0$ mianownik równy jest 0.

Przekształćmy funkcję $f(x)$ stosując wzór $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ do licznika i mianownika:

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5} = \frac{\sqrt{x^2+1}^2-1^2}{\sqrt{x^2+1}+1} : \frac{\sqrt{x^2+25}^2-5^2}{\sqrt{x^2+25}+5} = \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+25}+5}{x^2+25-25} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+25}+5}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+25}+5}{\sqrt{x^2+1}+1}$

Zatem:

$lim_{x\to0}f(x) = \frac{lim_{x\to0}\sqrt{x^2+25}+lim_{x\to0}5}{lim_{x\to0}\sqrt{x^2+1}+lim_{x\to0}1} = \frac{\sqrt{0+25}+5}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{5+5}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$

5.37.

$lim_{x\to0}\frac{sin3x}{4x}$

$f(x) = \frac{sin3x}{4x}$

Funkcja $f(x)$ określona jest dla:

$4x \neq 0$

$x \neq 0$

Czyli jej dziedziną jest $R \backslash \{0\}$.

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{sin3x}{4x} = \frac{sin3x}{3x} \cdot \frac{3}{4}$

Korzystając teraz z wzoru $lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ mamy:

$lim_{x \to 0} f(x) = lim_{x \to 0} \frac{sin3x}{3x} \cdot lim_{x \to 0} \frac{3}{4} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

5.38.

$lim_{x \to 0} \frac{4x}{3 \cdot sin2x}$

$f(x) = \frac{4x}{3 \cdot sin2x}$

Funkcja $f(x)$ określona jest dla:

$3 \cdot sin2x \neq 0$

$sin2x \neq 0$

$2x \neq k\pi, \qquad k \in C$

$x \neq k\frac{\pi}{2}, \qquad k \in C$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{4x}{3 \cdot sin2x} = \frac{2}{3 \cdot \frac{sin2x}{2x}}$

Zatem:

$lim_{x \to 0} f(x) = \frac{lim_{x \to 0} 2}{lim_{x \to 0} 3 \cdot lim_{x \to 0} \frac{sin2x}{2x}}$ =(korzystając z wzoru $lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1) = \frac{2}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$