5.39.

$lim_{x \to \infty} \frac{sinx}{x}$

$f(x) = \frac{sinx}{x}$, $D = R \backslash \{0\}$ (dziedzina)

Zauważmy, że:

$|\frac{sinx}{x}| \leqslant \frac{1}{x}$, dla każdego $x > 0$. Ponieważ $lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, więc wnioskujemy, że $lim_{x \to \infty} \frac{sinx}{x} = 0$.

I rzeczywiście, korzystając z definicji granicy funkcji przy $x \to \infty$ dla dowolnie wybranej liczby $\epsilon > 0$ możemy przyjąć $N = \frac{2}{\epsilon}$ i wtedy dla $x > N$ będzie:

$|\frac{sinx}{x}| \leqslant \epsilon \qquad (1)$

$\frac{|sinx|}{x} \leqslant \epsilon \qquad \wedge \qquad x > \frac{2}{\epsilon}$

$|sinx| \leqslant \epsilon \cdot x \qquad \wedge \qquad \epsilon \cdot x > 2$

$|sinx| < 2 < \epsilon \cdot x$

Co oczywiście jest prawdą. Czyli nierówność (1) jest prawdziwa a tym samym $lim_{x \to \infty} \frac{sinx}{x} = 0$.

5.40.

$lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{sinx}{x}$

$f(x) = \frac{sinx}{x}$, $D = R \backslash \{0\}$ (dziedzina)

$lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{sinx}{x} = \frac{lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} sinx}{lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} x}$ =(bo funkcje $sinx$ i x są ciągłe)= $\frac{sin\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

5.41.

$lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{cosx}{x - \frac{1}{2}\pi}$

$f(x) = \frac{cosx}{x - \frac{1}{2}\pi}$, $D = R \backslash \{\frac{1}{2}\pi\}$ (dziedzina)

Przekształćmy funkcję $f(x)$ korzystając z wzoru: $cox = sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$f(x) = \frac{cosx}{x - \frac{1}{2}\pi} = -\frac{sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x}$

Zatem: $lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} [-\frac{sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x}] = -lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = -1$ (bo $lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$)

5.42.

$lim_{x \to 0} \frac{tgx}{4x}$

$f(x) = \frac{tgx}{4x}$, $D = R \backslash \{0\}$ (dziedzina)

Granicę funkcji $f(x)$ obliczymy korzystając z wzoru $lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$ oraz przekształcając funkcję następująco:

$lim_{x\to 0}\frac{tgx}{4x} = \frac{1}{4}\cdot lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$

5.43.

$lim_{x\to 8}\frac{8-x}{sin(\frac{1}{8}\pi x)}$

$f(x) = \frac{8-x}{sin(\frac{1}{8}\pi x)}$, musi zachodzić $sin(\frac{1}{8}\pi x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\pi x \neq k\pi$, $k \in C \Leftrightarrow x \neq 8k$, $k \in C$

Przekształćmy funkcję f(x) korzystając z wzoru:

$sinx = sin(\pi - x)$

$f(x) = \frac{8-x}{sin(\pi-\frac{1}{8}\pi x)} = \frac{8-x}{sin[\pi(1-\frac{1}{8}x)]} = 8\cdot\frac{1-\frac{1}{8}x}{sin[\pi(1-\frac{1}{8}x)]} = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\pi(1-\frac{1}{8}x)}{sin[\pi(1-\frac{1}{8}x)]} = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{sin[\pi(1-\frac{1}{8}x)]}{\pi(1-\frac{1}{8}x)}}$

Zatem:

$lim_{x\to 8}f(x) = lim_{x\to 8}[\frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{sin[\pi(1-\frac{1}{8}x)]}{\pi(1-\frac{1}{8}x)}}] = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{lim_{x\to 8}1}{lim_{x\to 8}\frac{sin[\pi(1-\frac{1}{8}x)]}{\pi(1-\frac{1}{8}x)}}$ =(bo $lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1) = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{1} = \frac{8}{\pi}$

5.44.

$lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{sin3x}$

$f(x) = \frac{sin2x}{sin3x}$

Musi zachodzić

$sin3x \neq 0$

$3x \neq k\pi, \quad k \in C$

$x \neq \frac{1}{3}k\pi, \quad k \in C$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{sin2x}{sin3x} = \frac{sin2x\cdot\frac{2x}{2x}}{sin3x\cdot\frac{3x}{3x}} = \frac{2x}{3x}\cdot\frac{\frac{sin2x}{2x}}{\frac{sin3x}{3x}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{sin2x}{2x}}{\frac{sin3x}{3x}}$

Zatem korzystając z wzoru $lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$ obliczamy szukaną granicę:

$lim_{x\to 0}f(x) = lim_{x\to 0}[\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{sin2x}{2x}}{\frac{sin3x}{3x}}] = \frac{2}{3}\cdot\frac{lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}}{lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1} = \frac{2}{3}$

5.45.

$lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{tgx}$

$f(x) = \frac{tg2x}{tgx}$

Musi zachodzić $tgx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in C$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{tg2x}{tgx} = \frac{tg2x \cdot \frac{2x}{2x}}{tgx \cdot \frac{x}{x}} = \frac{2x}{x} \cdot \frac{\frac{tg2x}{2x}}{\frac{tgx}{x}} = 2 \cdot \frac{\frac{tg2x}{2x}}{\frac{tgx}{x}}$

Zatem korzystając z powyższego i z wzoru $lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$ mamy:

$lim_{x\to 0}f(x) = lim_{x\to 0}2 \cdot \frac{lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}}{lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}} = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$

5.46.

$lim_{x\to\pi}\frac{1+cosx}{sin^2x}$

$f(x) = \frac{1+cosx}{sin^2x}$

Musi zachodzić $sin^2x \neq 0 \Leftrightarrow sinx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, \quad k \in C$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ korzystając z wzorów:

$sin^2x = 1 - cos^2x$ i $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$f(x) = \frac{1+cosx}{sin^2x} = \frac{1+cosx}{1-cos^2x} = \frac{1+cosx}{(1-cosx)(1+cosx)} = \frac{1}{1-cosx} \cdot \frac{1+cosx}{1+cosx} = g(x) \cdot h(x)$, gdzie:

$g(x) = \frac{1}{1-cosx}$

$h(x) = \frac{1+cosx}{1+cosx}$

Funkcja $h(x)$ jest nieciągła w punkcie $x = \pi$ (i ogólnie $x = k\pi, \quad k \in C$). Dla wszystkich wartości x z dziedziny jej wartość wynosi 1. Zatem z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej funkcji wynika, że:

$lim_{x\to\pi-0}h(x) = lim_{x\to\pi-0}\frac{1+cosx}{1+cosx} = 1 \quad \wedge \quad lim_{x\to\pi+0}h(x) = lim_{x\to\pi+0}\frac{1+cosx}{1+cosx} = 1$

$\Updownarrow$

$lim_{x\to\pi}h(x) = 1$

Natomiast granica funkcji $g(x)$ wynosi:

$lim_{x\to\pi}g(x) = lim_{x\to\pi}\frac{1}{1-cosx} = \frac{lim_{x\to\pi}1}{lim_{x\to\pi}1 - lim_{x\to\pi}cosx} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$

Zatem granica funkcji dana w zadaniu wynosi:

$lim_{x\to\pi}f(x) = lim_{x\to\pi}g(x) \cdot lim_{x\to\pi}h(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

5.47.

$lim_{x\to\frac{1}{4}\pi}\frac{cosx - cos\frac{1}{4}\pi}{sinx - sin\frac{1}{4}\pi}$

$f(x) = \frac{cosx - cos\frac{1}{4}\pi}{sinx - sin\frac{1}{4}\pi}$

Musi zachodzić:

$sinx - sin\frac{1}{4}\pi \neq 0$

$sinx \neq sin\frac{1}{4}\pi$

$x + 2k\pi \neq \frac{1}{4}\pi \qquad k \in C$

$x \neq \frac{1}{4}\pi - 2k\pi \qquad k \in C$

$x \neq \frac{1}{4}\pi(1 - 8k) \qquad k \in C$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ korzystając z wzorów:

$sinx - siny = 2sin\frac{x-y}{2}cos\frac{x+y}{2}$

$cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}$

$f(x) = \frac{cosx - cos\frac{\pi}{4}}{sinx - sin\frac{\pi}{4}} = \frac{-2sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})} = -\frac{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})} \cdot \frac{sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})}{cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})} = -\frac{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})} \cdot tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}) = g(x) \cdot h(x),$

gdzie:

$g(x) = -\frac{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}$

$h(x) = tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})$

Funkcja $g(x)$ jest nieciągła w punkcie $x = \frac{\pi}{4}$. Dla wszystkich argumentów z dziedziny jej wartość wynosi -1. Zatem z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej funkcji wynika, że:

$lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0}g(x) = lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0}(-\frac{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}) = -1 \qquad \wedge \qquad lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}g(x) = lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}(-\frac{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}{2sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})}) = -1$

$\Updownarrow$

$lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x) = -1$

Natomiast funkcja $h(x)$ jest ciągła (tw. 5.4.10) w punkcie $x = \frac{\pi}{4}$. Zatem jej granica w tym punkcie wynosi:

$lim_{x\to\frac{\pi}{4}}h(x) = h(\frac{\pi}{4}) = tg(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\pi}{8}) = tg(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}) = tg(\frac{2\pi}{8}) = tg\frac{\pi}{4} = 1$

Ostatecznie szukana granica funkcji $f(x)$ wynosi:

$lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x) = lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x) \cdot lim_{x\to\frac{\pi}{4}}h(x) = -1 \cdot 1 = -1$

5.48.

$lim_{x\to 1}\frac{|tg(x-1)|}{(x-1)^2}$

$f(x) = \frac{|tg(x-1)|}{(x-1)^2}, \qquad D = R\backslash\{1\}$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{|tg(x-1)|}{(x-1)^2} = |\frac{tg(x-1)}{(x-1)^2}| - |\frac{tg(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x-1}| = |g(x) \cdot h(x)|$, gdzie:

$g(x) = \frac{tg(x-1)}{x-1}$

$h(x) = \frac{1}{x-1}$

Korzystając z wzoru $lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$, obliczamy granicę funkcji $g(x)$:

$lim_{x\to 1}g(x) = lim_{x\to 1}\frac{tg(x-1)}{x-1} = 1$

Obliczmy teraz granicę funkcji $h(x)$:

$lim_{x\to 1-0}h(x) = lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1} = -\infty$

$lim_{x\to 1+0}h(x) = lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1} = +\infty$

Zatem:

$lim_{x\to 1-0}f(x) = |lim_{x\to 1-0}g(x) \cdot lim_{x\to 1-0}h(x)| = |1 \cdot (-\infty)| = +\infty$

$lim_{x\to 1+0}f(x) = |lim_{x\to 1+0}g(x) \cdot lim_{x\to 1+0}h(x)| = |1 \cdot (+\infty)| = +\infty$

Ostatecznie szukana granica w punkcie $x = 1$ wynosi:

$lim_{x\to 1}f(x) = +\infty$

5.49.

$lim_{x\to 1}\frac{arctgx}{x}$

$f(x) = \frac{arctgx}{x}, \qquad D = R\backslash\{0\}$

Korzystając z definicji arcusa tangensa mamy:

$arctgx = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad tg\alpha = x, \qquad \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \qquad\qquad (1)$

Zatem mamy $f(x) = f(tg\alpha) = \frac{\alpha}{tg\alpha}$

$x \to 0 \Leftrightarrow tg\alpha \to 0 \Leftrightarrow \alpha \to 0$ bo zachodzi (1)

$lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{tg\alpha} = lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{\alpha}{\alpha}}{\frac{tg\alpha}{\alpha}} = lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\frac{tg\alpha}{\alpha}} = \frac{lim_{\alpha\to 0}1}{lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{1} = 1$

A zatem szukana granica wynosi:

$lim_{x\to 0}f(x) = lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{tga\alpha} = 1$