5.50.

$lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$

$f(x) = \frac{arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$

Musi zachodzić:

$-1 \leqslant 1-2x \leqslant 1 \qquad \wedge \qquad 4x^2-1 \neq 0$

$2x \leqslant 2 \quad \wedge \quad 2x \geqslant 0 \quad \wedge \quad (2x-1)(2x+1) \neq 0$

$x \leqslant 1 \quad \wedge \quad x \geqslant 0 \quad \wedge \quad 2x \neq 1 \quad \wedge \quad 2x \neq -1$

$x \leqslant 1 \quad \wedge \quad x \geqslant 0 \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}$

$x \in < 0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1 > \quad (1)$

Mamy:

$arcsin(1-2x) = \alpha \Leftrightarrow sin\alpha = 1-2x \quad \wedge \ (1)$

$2x = 1 - sin\alpha$

$x = \frac{1-sin\alpha}{2}$

Więc:

$f(x) = f(\frac{1-sin\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{4(\frac{1-sin\alpha}{2})^2-1} = \frac{\alpha}{(2\cdot\frac{1-sin\alpha}{2}-1)(2\cdot\frac{1-sin\alpha}{2}+1)} = \frac{\alpha}{(1-sin\alpha-1)(1-sin\alpha+1)} =$

$= \frac{\alpha}{-sin\alpha\cdot(2-sin\alpha)} = \frac{\alpha}{sin\alpha(sin\alpha-2)}$

$x \to \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-sin\alpha}{2} \to \frac{1}{2}$

$1 - sin\alpha \to 1$

$sin\alpha \to 0$

$\alpha \to k\pi, \ k \in C$

ale ponieważ α jest wartością funkcji $arcsin$, więc $\alpha \in < -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} >$. Ostatecznie $\alpha \to 0$.

$lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{sin\alpha\cdot(sin\alpha-2)} = lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\frac{sin\alpha}{\alpha}\cdot(sin\alpha-2)} = \frac{lim_{\alpha \to 0} 1}{lim_{\alpha \to 0} \frac{sin\alpha}{\alpha}\cdot lim_{\alpha \to 0}(sin\alpha-2)} =$

$= \frac{1}{1\cdot(lim_{\alpha \to 0} sin\alpha - lim_{\alpha \to 0} 2)} = \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

5.51.

$lim_{x \to 0} \sqrt[x]{1+sinx}$

$f(x) = \sqrt[x]{1+sinx} = (1+sinx)^{\frac{1}{x}} = [(1+sinx)^{\frac{1}{sinx}}]^{\frac{sinx}{x}}$

Ponieważ $lim_{x \to 0} sinx = 0$, $lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ oraz $lim_{x \to 0}(1+sinx)^{\frac{1}{sinx}} = e$, więc:

$lim_{x\to 0}f(x) = lim_{x\to 0}[(1+sinx)^{\frac{1}{sinx}}]^{\frac{sinx}{x}} = [lim_{x\to 0}(1+sinx)^{\frac{1}{sinx}}]^{lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}} = e^1 = e$

5.52.

$lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$

$f(x) = (1-3x)^{\frac{1}{x}}$

Musi zachodzić:

$1-3x > 0 \quad \wedge \quad x \neq 0$

$3x < 1$

$x < \frac{1}{3}$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = (1-3x)^{\frac{1}{x}} = (1+(-3x))^{\frac{1}{x}} = [(1+(-3x))^{\frac{1}{-3x}}]^{-3}$

Ponieważ $lim_{x\to 0}(-3x) = 0$, więc korzystając z wzoru $lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, więc:

$lim_{x\to 0}(1+(-3x))^{\frac{1}{-3x}} = e$ i ostatecznie:

$lim_{x\to 0}f(x) = [lim_{x\to 0}(1+(-3x))^{\frac{1}{-3x}}]^{-3} = e^{-3}$

5.53.

$lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{n}{x}}$

$f(x) = (1+kx)^{\frac{n}{x}}$

Dla $k = 0$ mamy:

$lim_{x\to 0}f(x) = lim_{x\to 0}(1+0)^{\frac{n}{x}} = lim_{x\to 0}1^{\frac{n}{x}} = 1, \qquad x \neq 0$

Dla $k \neq 0$ musi zachodzić:

$1+kx > 0, \qquad x \neq 0$

$kx > -1$

Dla $n = 0$ mamy:

$lim_{x\to 0}f(x) = lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{0}{x}} = lim_{x\to 0}(1+kx)^0 = 1, \qquad x \neq 0$

Jeśli $k > 0$ i $n \neq 0$, to:

$kx > -1$

$x > -\frac{1}{k}$

oraz, korzystając z wzoru $lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$:

$lim_{x\to 0}f(x) = lim_{x\to 0}[(1+kx)^{\frac{1}{kx}}]^{nk} = e^{nk}$

Jeśli $k < 0$ i $n \neq 0$, to:

$kx > -1$

$x < -\frac{1}{k}$

oraz, korzystając z wzoru $lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$:

$lim_{x\to 0}f(x) = lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{n}{x}} = lim_{x\to 0}(1+(-kx))^{\frac{n}{x}} = lim_{x\to 0}[(1+(-kx))^{\frac{1}{-kx}}]^{-nk} = e^{-nk}$

Zatem szukana granica wynosi:

$$lim_{x\to 0}f(x) = \begin{cases} e^{nk} & dla\ k > 0 \\ e^{-nk} & dla\ k < 0 \end{cases}$$

5.54.

$f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}$ dla $x \neq -5$ i $f(-5) = -10$

Funkcja $f(x)$ (bez dodatkowego warunku na $f(-5)$) jest funkcją wymierną określoną dla $x \in R \backslash -5$ i ciągła dla wszystkich x z dziedziny. Zbadajmy czy jest ona ciągła dla $x = -5$:

$f(-5) = -10$, $lim_{x\to -5}f(x) =?$

Przejształćmy tą funkcję następująco:

$f(x) = \frac{x^2-25}{x+5} = \frac{x^2-5^2}{x+5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x+5} = \frac{x+5}{x+5}\cdot(x-5) = g(x)\cdot h(x)$

gdzie:

$g(x) = \frac{x+5}{x+5}$

$h(x) = x-5$

Funkcja $g(x)$ jest funkcją wymierną ciągłą dla wszystkich x z dziedziny i dla wszystkich tych x przyjmuje wartość 1. Z tego i z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że:

$$lim_{x\to -5-0}g(x) = lim_{x\to -5-0}\frac{x+5}{x+5} = 1 \quad \wedge \quad lim_{x\to -5+0}g(x) = lim_{x\to -5+0}\frac{x+5}{x+5} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$lim_{x\to -5}g(x) = 1$$

Natomiast $h(x)$ jest funkcją liniową ciągłą dla $x \in R$. W związku z tym na podstawie definicji ciągłości funkcji wynika, że:

$lim_{x \to -5} h(x) = h(-5) = -5 - 5 = -10$

A więc:

$lim_{x \to -5} f(x) = lim_{x \to -5} g(x) \cdot lim_{x \to -5} h(x) = 1 \cdot (-10) = -10 = f(-5)$

Czyli ostatecznie funkcja $f(x)$ jest ciągła w całej dziedzinie.

5.55.

$f(x) = \frac{sinx}{x}$, dla $x \neq 0$ i $f(0) = 1$

Zapiszmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{sinx}{x} = \frac{1}{x} \cdot sinx = g(x) \cdot h(x)$

gdzie:

$g(x) = \frac{1}{x}$

$h(x) = sinx$

Funkcja $g(x)$ jest funkcją wymierną a tym samym jest ciągła w całej swojej dziedzinie: $x \in R \backslash \{0\}$. Podobnie funkcja $h(x)$ jako funkcja trygonometryczna sinus jest ciągła w całej swojej dziedzinie: $x \in R$.

Zatem na podstawie tw. 5.4.2 o iloczynie funkcji ciągłych w punkcie $x = c$, funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $x \in R \backslash \{0\}$.

Zbadajmy teraz ciągłość funkcji $f(x)$ w punkcie $x = 0$. Mamy:

$lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1 = f(0)$

Zatem na podstawie definicji ciągłości funkcji, funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x = 0$.

Ostatecznie funkcja $f(x)$ jest ciągła w całej dziedzinie $x \in R$.

5.56.

$f(x) = \frac{sinx}{|x|}$, dla $x \neq 0$ i $f(0) = 1$

Na podstawie definicji modułu mamy:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & dla\ x > 0 \\ \frac{sinx}{-x} & dla\ x < 0 \end{cases}$$

Jak zostało pokazane w zadaniu poprzednim (5.55), funkcja $\frac{sinx}{x}$ jest ciągła w całej dziedzinie, więc nasza funkcja $f(x)$ jest także ciągła dla $x > 0$.

Dla $x < 0$ mamy $f(x) = \frac{sinx}{-x} = -\frac{sinx}{x}$, czyli funkcja $f(x)$ także jest ciągła. Zbadajmy teraz jej ciągłość w punkcie $x = 0$. W tym celu obliczmy jej granicę lewostronną i prawostronną w tym punkcie:

$lim_{x\to-0}(-\frac{sinx}{x}) = -lim_{x\to-0}\frac{sinx}{x} = -1$

$lim_{x\to+0}\frac{sinx}{x} = 1$

$f(0) = 1$

Widzimy, że $lim_{x\to-0}f(x) \neq f(0)$ a tym samym funkcja dana w zadaniu jest nieciągła w punkcie $x \neq 0$.

5.57.

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

Funkcja $f(x)$ jest określona dla $x \in R\backslash\{0\}$.

Jest ona sumą wielomianu stopnia pierwszego ($g(x) = x$) oraz funkcji wymiernej ($h(x) = \frac{1}{x}$), które są ciągłe w całej dziedzinie. Zatem na podstawie tw. 5.4.1 funkcja $f(x)$ jest ciągła w całej dziedzinie. Natomiast w punkcie $x = 0$ jest ona nieokreślona a tym samym nieciągła.

5.58.

$f(x) = \frac{x^2-x^3}{|x-1|}$

Dziedziną funkcji $f(x)$ jest $D = R\backslash\{1\}$.

Z definicji wartości bezwzględnej mamy:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x^3}{x-1} & dla\ x > 1 \\ \frac{x^2-x^3}{-x+1} & dla\ x < 1 \end{cases}$$

Zarówno dla $x > 1$ jak i dla $x < 1$ mamy do czynienia z funkcją wymierną, która w całej dziedzinie jest ciągła. Zatem funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $x \neq 1$. Natomiast w punkcie $x = 1$ jest ona nieokreślona i nieciągła.

5.59.

$f(x) = x - [x]$

Dziedziną funkcji $f(x)$ jest cały zbiór liczb rzeczywistych: $D = R$.

Zapiszmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = x - [x] = g(x) - h(x)$, gdzie:

$g(x) = x$

$h(x) = [x]$

Funkcja $g(x)$ jako wielomian pierwszego stopnia jest ciągła w całej dziedzinie. Natomiast funkcja $h(x)$ zgodnie z twierdzeniem 5.4.14 jest nieciągła dla x całkowitych oraz ciągła dla x pozostałych.

Zatem zgodnie z twierdzeniem 5.4.1 o ciągłości funkcji ciągłych, funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $x \in R \ \wedge \ x \neq k, \ k \in C$.

Natomiast dla $x = k, \ k \in C$ mamy:

$lim_{x \to k+0} f(x) = lim_{x \to k+0} x - lim_{x \to k+0} [x] = k - k = 0$

oraz

$lim_{x \to k-0} f(x) = lim_{x \to k-0} x - lim_{x \to k-0} [x] = k - (k-1) = 1$

Widzimy, że

$lim_{x \to k+0} f(x) \neq lim_{x \to k-0} f(x)$

A więc w punktach będących liczbami całkowitymi funkcja $f(x)$ jest nieciągła.

5.60.

$f(x) = [x] + [-x]$

Dziedziną funkcji $f(x)$ jest cały zbiór liczb rzeczywistych: $D = R$.

Zauważmy, że dla $x \in R \backslash C$ mamy:

$f(x) = [x] + [-x] = [k, l] + [-k, l]$, gdzie:

k - część całkowita

l - część ułamkowa

Dla $k \geqslant 0$ mamy:

$f(x) = k + (-(k+1)) = k + (-k-1) = -1$

Dla $k < 0$ mamy:

$f(x) = (k-1) + (-k) = -1$

Natomiast dla $x \in C$ mamy:

$f(x) = [x] + [-x] = x + (-x) = 0$

Zatem funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $x \in R \backslash C$ oraz nieciągła dla $x \in C$.