5.61.

$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ $\qquad f(0)=?$

Musi zachodzić:

$1+x\geqslant 0$ $\qquad x\neq 0$

$x\geqslant -1$ $\qquad x\neq 0$

Czyli: $D=<-1;0)\cup(0;\infty)$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{\sqrt{1+x}^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

Obliczmy teraz granice lewostronną i prawostronną powyższej funkcji w punkcie $x=0$:

$lim_{x\to -0}f(x)=lim_{x\to -0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{lim_{x\to -0}1}{lim_{x\to -0}\sqrt{1+x}+lim_{x\to -0}1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$lim_{x\to +0}f(x)=lim_{x\to +0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{lim_{x\to +0}1}{lim_{x\to +0}\sqrt{1+x}+lim_{x\to +0}1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Zatem funkcja $f(x)$ będzie ciągła w punkcie $x=0$, gdy przyjmie ona w tym punkcie wartość $f(0)=\frac{1}{2}$.

5.62.

$f(x)=xsin\frac{\pi}{x}$, $\qquad f(0)=?$

$D=R\backslash\{0\}$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x)=xsin\frac{\pi}{x}=x\cdot\frac{\pi}{x}\cdot\frac{sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi\cdot\frac{sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}$

Obliczmy teraz granicę:

$lim_{x\to 0}f(x)=lim_{x\to 0}(\pi\cdot\frac{sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}})=\pi\cdot lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}$

Gdy $x\to +0$, to $\frac{\pi}{x}\to +\infty$

Gdy $x\to -0$, to $\frac{\pi}{x}\to -\infty$

W zadaniu 5.39 pokazaliśmy, że $lim_{x\to\infty}\frac{sinx}{x}=0$.

Podobnie można pokazać, że $lim_{x\to -\infty}\frac{sinx}{x}=0$.

Zatem:

$lim_{x\to 0}f(x)=\pi\cdot lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi\cdot 0=0$

Żeby więc funkcja $f(x)$ była ciągła w punkcie $x=0$ musi być $f(0)=0$.

5.63.

$f(x) = \frac{sin^2 x}{1 - cos x}$, $\quad f(0) = ?$

Musi zachodzić:

$1 - cosx \neq 0$

$cosx \neq 1$

$x \neq 2k\pi, \quad k \in C$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ korzystając z wzorów:

$sin^2 x = 1 - cos^2 x$ oraz $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$f(x) = \frac{sin^2 x}{1-cosx} = \frac{1-cos^2 x}{1-cosx} = \frac{(1-cosx)(1+cosx)}{1-cosx} = \frac{1-cosx}{1-cosx} \cdot (1 + cosx) = g(x) \cdot h(x)$, gdzie:

$g(x) = \frac{1-cosx}{1-cosx}$

$h(x) = 1 + cosx$

Mamy:

$lim_{x \to 0} g(x) = lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{1-cosx} = 1$

$lim_{x \to 0} h(x) = lim_{x \to 0} (1 + cosx) = 1 + 1 = 2$

A więc:

$lim_{x \to 0} f(x) = lim_{x \to 0} g(x) \cdot lim_{x \to 0} h(x) = 1 \cdot 2 = 2$

Żeby więc funkcja $f(x)$ była ciągła w punkcie $x = 0$, musi być $f(0) = 2$.

5.64.

$f(x) = \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]$, $\quad x = 0$

$D = R \backslash \{0\}$

Zauważmy, że:

$0 \leqslant \frac{b}{x} - [\frac{b}{x}] < 1$

Dla $a > 0$ oraz $x \to +0$, mamy:

$0 \leqslant \frac{b}{x} - [\frac{b}{x}] < 1 \quad / \cdot \frac{x}{a}$

$\frac{x}{a} \cdot 0 \leqslant \frac{x}{a} \cdot \frac{b}{x} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}] < \frac{x}{a} \cdot 1$

$0 \leqslant \frac{b}{a} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}] < \frac{x}{a}$

Ale $lim_{x \to +0} 0 = 0$ oraz $lim_{x \to +0} \frac{x}{a} = 0$, więc (na podstawie tw. o 3 ciągach):

$lim_{x \to +0} (\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = 0$

$lim_{x \to +0}(\frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = \frac{b}{a}$

Dla $a < 0$ oraz $x \to +0$ mamy:

$0 \leqslant \frac{b}{x} - [\frac{b}{x}] < 1 \quad / \cdot \frac{x}{a}$

$\frac{x}{a} \cdot 0 \geqslant \frac{x}{a} \cdot \frac{b}{x} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}] > \frac{x}{a} \cdot 1$

$0 \geqslant \frac{b}{a} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}] > \frac{x}{a}$

Ale $lim_{x \to +0} 0 = 0$ oraz $lim_{x \to +0} \frac{x}{a} = 0$, więc (na podstawie tw. o 3 ciągach):

$lim_{x \to +0}(\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = 0$

$lim_{x \to +0}(\frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = \frac{b}{a}$

Dla $a > 0$ oraz $x \to -0$, mamy:

$0 \leqslant \frac{b}{x} - [\frac{b}{x}] < 1 \quad / \cdot \frac{x}{a}$

$\frac{x}{a} \cdot 0 \geqslant \frac{x}{a} \cdot \frac{b}{x} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}] > \frac{x}{a} \cdot 1$

$0 \geqslant \frac{b}{a} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}] > \frac{x}{a}$

Ale $lim_{x \to -0} 0 = 0$ oraz $lim_{x \to -0} \frac{x}{a} = 0$, więc (na podstawie tw. o 3 ciągach):

$lim_{x \to -0}(\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = 0$

$lim_{x \to -0}(\frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = \frac{b}{a}$

Dla $a < 0$ oraz $x \to -0$ mamy:

$0 \leqslant \frac{b}{x} - [\frac{b}{x}] < 1 \quad / \cdot \frac{x}{a}$

$\frac{x}{a} \cdot 0 \leqslant \frac{x}{a} \cdot \frac{b}{x} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}] < \frac{x}{a} \cdot 1$

$0 \leqslant \frac{b}{a} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}] < \frac{x}{a}$

Ale $lim_{x \to -0} 0 = 0$ oraz $lim_{x \to -0} \frac{x}{a} = 0$, więc (na podstawie tw. o 3 ciągach):

$lim_{x \to -0}(\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = 0$

$lim_{x \to -0}(\frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = \frac{b}{a}$

Czyli po uwzględnieniu wszystkich powyższych przypadków zachodzi:

$lim_{x \to -0}(\frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = \frac{b}{a}$

$lim_{x \to +0}(\frac{x}{a} \cdot [\frac{b}{x}]) = \frac{b}{a}$

5.65.

$f(x) = \frac{b}{x} \cdot [\frac{x}{a}], \qquad x = 0$

$D = R\backslash\{0\}$

Dla $b = 0$ mamy $\frac{b}{x} = 0 \Rightarrow \frac{b}{x} \cdot [\frac{x}{a}] = 0 \cdot [\frac{x}{a}] = 0 \Rightarrow lim_{x\to+0}f(x) = lim_{x\to-0}f(x) = 0$

Dla $a > 0$ i $x \to +0$, mamy:

$[\frac{x}{a}] = 0$ bo $\frac{x}{a} \in (0;1)$

$\Downarrow$

$\frac{b}{x} \cdot [\frac{x}{a}] = \frac{b}{x} \cdot 0 = 0$

$\Downarrow$

$lim_{x\to+0}f(x) = 0$

Dla $a < 0$ i $x \to +0$, mamy:

$[\frac{x}{a}] = -1$ bo $\frac{x}{a} \in (-1;0)$

Dla $b > 0$ mamy: $\frac{b}{x} \to +\infty$, więc:

$$lim_{x\to+0}f(x) = lim_{x\to+0}\frac{b}{x} \cdot lim_{x\to+0}[\frac{x}{a}] = +\infty \cdot (-1) = -\infty$$

Dla $b < 0$ mamy: $\frac{b}{x} \to -\infty$, więc:

$$lim_{x\to+0}f(x) = lim_{x\to+0}\frac{b}{x} \cdot lim_{x\to+0}[\frac{x}{a}] = -\infty \cdot (-1) = +\infty$$

Dla $a > 0$ i $x \to -0$, mamy:

$[\frac{x}{a}] = -1$ bo $\frac{x}{a} \in (-1;0)$

Dla $b > 0$ mamy: $\frac{b}{x} \to -\infty$, więc:

$$lim_{x\to-0}f(x) = lim_{x\to-0}\frac{b}{x} \cdot lim_{x\to-0}[\frac{x}{a}] = -\infty \cdot (-1) = +\infty$$

Dla $b < 0$ mamy: $\frac{b}{x} \to +\infty$, więc:

$$lim_{x\to-0}f(x) = lim_{x\to-0}\frac{b}{x} \cdot lim_{x\to-0}[\frac{x}{a}] = +\infty \cdot (-1) = -\infty$$

Dla $a < 0$ i $x \to -0$, mamy:

$[\frac{x}{a}] = 0$ bo $\frac{x}{a} \in (0;1)$, więc:

$f(x) = \frac{b}{x} \cdot [\frac{x}{a}] = \frac{b}{x} \cdot 0 = 0 = lim_{x\to-0}f(x) = lim_{x\to+0}f(x)$

5.66.

$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}, \qquad x = 0$

$D = R\backslash\{0\}$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \frac{e^{\frac{1}{x}}+1-2}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}+1} - \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}+1} = g(x) - h(x)$

gdzie:

$g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

$h(x) = \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

W zadaniu 5.12 pokazano, że:

$lim_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ oraz $lim_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}} = 0$ (1)

Funkcja $g(x)$ dla każdego $x \in D$ przyjmuje wartość 1. Zatem z tego oraz z definicji granicy lewostronnej i prawostronnej wynika, że:

$lim_{x\to-0}g(x) = 1$ oraz $lim_{x\to+0}g(x) = 1$

Natomiast z (1) wynika, że:

$lim_{x\to-0}h(x) = \frac{lim_{x\to-0}2}{lim_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}}+lim_{x\to-0}1} = \frac{2}{0+1} = 2$

$lim_{x\to+0}h(x) = \frac{lim_{x\to+0}2}{lim_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}+lim_{x\to+0}1} = \frac{2}{+\infty+1} = \frac{2}{+\infty} = 0$

Zatem:

$lim_{x\to-0}f(x) = lim_{x\to-0}g(x) - lim_{x\to-0}h(x) = 1 - 2 = -1$

oraz

$lim_{x\to+0}f(x) = lim_{x\to+0}g(x) - lim_{x\to+0}h(x) = 1 - 0 = 1$

5.67.

$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^3}},$ $x = 1$

$D = R\backslash\{1\}$

$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$lim_{x\to1-0}\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{lim_{x\to1-0}1}{lim_{x\to1-0}(1-x)\cdot lim_{x\to1-0}(1+x+x^2)} = \frac{1}{3}\cdot(+\infty) = +\infty$

$lim_{x\to1+0}\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{lim_{x\to1+0}1}{lim_{x\to1+0}(1-x)\cdot lim_{x\to1+0}(1+x+x^2)} = \frac{1}{3}\cdot(-\infty) = -\infty$

Opierając się na wzorach 5.4.18 otrzymujemy:

$lim_{x\to1-0}e^{\frac{1}{1-x^3}} = +\infty$ $lim_{x\to1+0}e^{\frac{1}{1-x^3}} = 0$

5.68.

$f(x) = x\cdot e^{\frac{1}{x}},$ $x = 0$

$D = R \backslash \{0\}$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$

Podstawmy teraz $u = \frac{1}{x}$:

$g(u) = \frac{e^u}{u}$

Gdy $x \to +0$, to $u \to +\infty$ i wtedy:

$lim_{x \to +0} f(x) = lim_{u \to +\infty} g(u) = lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u}$

Zauważmy teraz, że:

$e^u > u^2 \qquad / : u$

$\frac{e^u}{u} > \frac{u^2}{u}$

$\frac{e^u}{u} > u$

Ale $lim_{u \to +\infty} u = +\infty$, więc na mocy kryterium porównawczego:

$lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty = lim_{x \to +0} f(x)$

Podobnie gdy $x \to -0$, to $u \to -\infty$ i wtedy:

$lim_{x \to -0} f(x) = lim_{u \to -\infty} g(u) = lim_{u \to -\infty} \frac{e^u}{u}$

ale

$lim_{u \to -\infty} \frac{e^u}{u} = \frac{lim_{u \to -\infty} e^u}{lim_{u \to -\infty} u} = (na\, podstawie\, wzoru\, 5.4.18) = \frac{0}{-\infty} = 0$

5.69.

$f(x) = \frac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}, \qquad x = 1$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{2 + \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x}}$

Gdy $x \to 1 - 0$, to $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ i $e^{\frac{1}{x-1}} \to 0$ (na podstawie wzoru 5.4.18), zatem:

$lim_{x \to 1-0} f(x) = \frac{lim_{x \to 1-0} 1}{lim_{x \to 1-0} 2 + \frac{lim_{x \to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}}}{lim_{x \to 1-0} x}} = \frac{1}{2 + \frac{0}{1}} = \frac{1}{2}$

Gdy $x \to 1 + 0$, to $\frac{1}{x-1} \to +\infty$ i $e^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty$ (na podstawie wzoru 5.4.18), zatem:

$lim_{x\to 1+0}f(x) = \frac{lim_{x\to 1+0}1}{lim_{x\to 1+0}2+\frac{lim_{x\to 1+0}e^{\frac{1}{x-1}}}{lim_{x\to 1+0}x}} = \frac{1}{2+\frac{+\infty}{1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

5.70.

$f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $\qquad x = 0$

Przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}(1+e^{\frac{1}{x}})}$

Gdy $x \to -0$, to $\frac{1}{x} \to -\infty$ i $e^{\frac{1}{x}} \to 0$ (na podstawie wzoru 5.4.18), zatem:

$lim_{x\to -0}f(x) = \frac{lim_{x\to -0}1}{lim_{x\to -0}\frac{1}{x}\cdot(lim_{x\to -0}1+lim_{x\to -0}e^{\frac{1}{x}})} = \frac{1}{-\infty\cdot(1+0)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

Gdy $x \to +0$, to $\frac{1}{x} \to +\infty$ i $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ (na podstawie wzoru 5.4.18), zatem:

$lim_{x\to +0}f(x) = \frac{lim_{x\to +0}1}{lim_{x\to +0}\frac{1}{x}\cdot(lim_{x\to +0}1+lim_{x\to +0}e^{\frac{1}{x}})} = \frac{1}{+\infty\cdot(1+(+\infty))} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Czyli zarówno granica lewostronna jak i prawostronna funkcji $f(x)$ w punkcie $x = 0$ wynosi 0, ale nie jest ciagła w tym punkcie, gdyż $x = 0$ nie należy do dziedziny tej funkcji.

5.71.

$f(x) = 2^{\frac{1}{x-a}}$, $\qquad$ w punkcie $x = a$

$D = R\backslash\{a\}$

Dla $a > 0$:

Gdy $x \to a+0$, to $\frac{1}{x-a} \to +\infty$ a zatem na podstawie wzoru 5.4.18 mamy:

$lim_{x\to a+0}f(x) = lim_{x\to a+0}2^{\frac{1}{x-a}} = +\infty$

Gdy $x \to a-0$, to $\frac{1}{x-a} \to -\infty$ a zatem na podstawie wzoru 5.4.18 mamy:

$lim_{x\to a-0}f(x) = lim_{x\to a-0}2^{\frac{1}{x-a}} = 0$

Dla $a = 0$ $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$:

Gdy $x \to +0$, to $\frac{1}{x} \to +\infty$ a zatem na podstawie wzoru 5.4.18 mamy:

$lim_{x\to +0}f(x) = lim_{x\to +0}2^{\frac{1}{x}} = +\infty$

Gdy $x \to -0$, to $\frac{1}{x} \to -\infty$ a zatem na podstawie wzoru 5.4.18 mamy:

$lim_{x \to -0} f(x) = lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$

Dla $a < 0$:

Gdy $x \to a + 0$, to $\frac{1}{x-a} \to +\infty$ i granica prawostronna funkcji $f(x)$ podobnie jak w poprzednich przypadkach wynosi $+\infty$.

Gdy $x \to a - 0$, to $\frac{1}{x-a} \to -\infty$ i granica lewostronna funkcji $f(x)$ podobnie jak w poprzednich przypadkach wynosi 0.

Zatem dla dowolnego a granica lewostronna funkcji $f(x)$ w punkcie $x = a$ wynosi 0 a granica prawostronna w tym punkcie wynosi $+\infty$.