5.72.

$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$ w punkcie $x = 0$

Dla $x \to -0$ mamy (na podstawie zadania 5.4 praz wzoru 5.4.18):

$\frac{1}{x} \to -\infty$, $2^{\frac{1}{x}} \to 0$, $3^{\frac{1}{x}} \to 0$, zatem:

$lim_{x\to -0} f(x) = \frac{lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} + lim_{x\to -0} 3}{lim_{x\to -0} 3^{\frac{1}{x}} + lim_{x\to -0} 2} = \frac{0+3}{0+2} = \frac{3}{2}$

Znajdźmy teraz granicę prawostronną w punkcie $x = 0$. W tym celu przekształćmy funkcję $f(x)$ następująco:

$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2} = \frac{\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}} + \frac{3}{2^{\frac{1}{x}}}}{\frac{3^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}} + \frac{2}{2^{\frac{1}{x}}}} = \frac{1+\frac{3}{2^{\frac{1}{x}}}}{(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}} + \frac{2}{2^{\frac{1}{x}}}}$

Dla $x \to +0$ mamy (na podstawie zadania 5.4 praz wzoru 5.4.18):

$\frac{1}{x} \to +\infty$, $2^{\frac{1}{x}} \to +\infty$, $(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}} \to +\infty$, zatem:

$lim_{x\to +0} \frac{1+\frac{3}{2^{\frac{1}{x}}}}{(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}} + \frac{2}{2^{\frac{1}{x}}}} = \frac{lim_{x\to +0} 1 + \frac{lim_{x\to +0} 3}{lim_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}}}}{lim_{x\to +0} (\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}} + \frac{lim_{x\to +0} 2}{lim_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}}}} = \frac{1+\frac{3}{+\infty}}{+\infty + \frac{2}{+\infty}} = \frac{1+0}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$

A więc ostatecznie granica prawostronna w punkcie $x = 0$ wynosi 0 natomiast granica lewostronna $\frac{3}{2}$.

5.73.

$f(x) = \begin{cases} x \cdot sin\frac{1}{x} & dla \quad -\infty < x < 0 \\ sin\frac{1}{x} & dla \quad 0 < x < +\infty \end{cases}$ w punkcie $x = 0$

$D = R\backslash\{0\}$

Dla $x \to -0$ mamy:

$f(x) = x \cdot sin\frac{1}{x}$

oraz:

$-1 \leqslant sin\frac{1}{x} \leqslant 1 \qquad / \cdot x$

$-x \geqslant x \cdot sin\frac{1}{x} \geqslant x$

Ale $-x \to 0$ oraz $x \to 0$, więc na podstawie twierdzenia o trzech ciągach $lim_{x\to -0}(x \cdot sin\frac{1}{x}) = 0$

Dla $x \to +0$ mamy:

$f(x) = sin\frac{1}{x}$ oraz $\frac{1}{x} \to +\infty$

Ale wraz ze wzrostem $\frac{1}{x}$ do $+\infty$ funkcja sinus zmienia się okresowo i w sposób ciągły w przedziale

$< -1; 1 >$, więc granica prawostronna funkcji $f(x)$ w punkcie $x = 0$ nie istnieje.

Ostatecznie granica lewostronna funkcji $f(x)$ w punkcie $x = 0$ wynosi 0, natomiast granica prawostronna tej funkcji w punkcie $x = 0$ nie istnieje.

5.74.

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{|sinx|}}$ w punkcie $x = 0$

$D = R \backslash \{0\}$

Przekształćmy tę funkcję następująco:

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{|sinx|}} = \frac{x}{\sqrt{|sinx \cdot \frac{x}{x}|}} = \frac{x}{\sqrt{|\frac{sinx}{x} \cdot x|}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{|sinx|}{|x|} \cdot |x|}}$

Dla $x \to +0$ mamy $|x| = x$, $|sinx| = sinx$, zatem

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{|sinx|}{|x|} \cdot |x|}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{sinx}{x} \cdot x}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{sinx}{x}} \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{\frac{sinx}{x}} \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{sinx}{x}}}$

$lim_{x \to +0} f(x) = \frac{lim_{x \to +0} \sqrt{x}}{lim_{x \to +0} \sqrt{\frac{sinx}{x}}} = \frac{0}{\sqrt{lim_{x \to +0} \frac{sinx}{x}}} =$(korzystając z wzoru $lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$) $= \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$

Dla $x \to -0$ mamy $|x| = -x$, $|sinx| = -sinx$, zatem

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{|sinx|}{|x|} \cdot |x|}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{-sinx}{-x} \cdot (-x)}} = \frac{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}}{\sqrt{\frac{sinx}{x}} \cdot \sqrt{-x}} = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{\frac{sinx}{x}}}$

$lim_{x \to -0} f(x) = \frac{lim_{x \to -0} \sqrt{-x}}{lim_{x \to -0} \sqrt{\frac{sinx}{x}}} = \frac{0}{\sqrt{lim_{x \to -0} \frac{sinx}{x}}} =$(korzystając z wzoru $lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$) $= \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$

Podsumowując, zarówno lewostronna jak i prawostronna granica funkcji $f(x)$ w punkcie $x = 0$ wynosi 0.

5.75.

$f(x) = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{\pi} \cdot arctg \frac{a}{x-a}$ w punkcie $x = a$

$D = R \backslash \{a\}$

Gdy $x \to a + 0$, to $\frac{a}{x-a} \to +\infty$ i $arctg \frac{a}{x-a} \to \frac{\pi}{2}$

Zatem:

$lim_{x \to a+0} f(x) = lim_{x \to a+0} \frac{b+c}{2} + lim_{x \to a+0} \frac{b-c}{\pi} \cdot lim_{x \to a+0} arctg \frac{a}{x-a} = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} =$

$= \frac{2b}{2} = b$

Podobnie dla $x \to a - 0$, zachodzi $\frac{a}{x-a} \to -\infty$ i $arctg \frac{a}{x-a} \to -\frac{\pi}{2}$

Zatem:

$lim_{x\to a-0}f(x) = lim_{x\to a-0}\frac{b+c}{2} + lim_{x\to a-0}\frac{b-c}{\pi} \cdot lim_{x\to a-0}arctg\frac{a}{x-a} = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{\pi} \cdot (-\frac{\pi}{2}) = \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} =$

$= \frac{2c}{2} = c$

I ostatecznie granica lewostronna funkcji $f(x)$ w punkcie $x = a$ wynosi c natomiast granica prawostronna w tym punkcie wynosi b.

5.76.

$ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad$ $b \neq 0,\ a \to 0,\ lim_{a\to 0}x_1 =?,\ lim_{a\to 0}x_2 =?$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Znajdźmy granicę pierwszego miejsca zerowego:

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{-b+\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{2a\cdot(-b+\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{b^2-b^2+4ac}{-2ab+2a\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{4ac}{2a\sqrt{b^2-4ac}-2ab} = \frac{2c}{\sqrt{b^2-4ac}-b}$

Zatem:

$lim_{a\to 0}x_1 = \frac{lim_{a\to 0}2c}{lim_{a\to 0}\sqrt{b^2-4ac}-lim_{a\to 0}b} = \frac{2c}{\sqrt{lim_{a\to 0}b^2-lim_{a\to 0}4ac}-b} = \frac{2c}{\sqrt{b^2-0}-b} = \frac{2c}{b-b} = \frac{2}{0} = +\infty$

Znajdźmy teraz granicę drugiego miejsca zerowego:

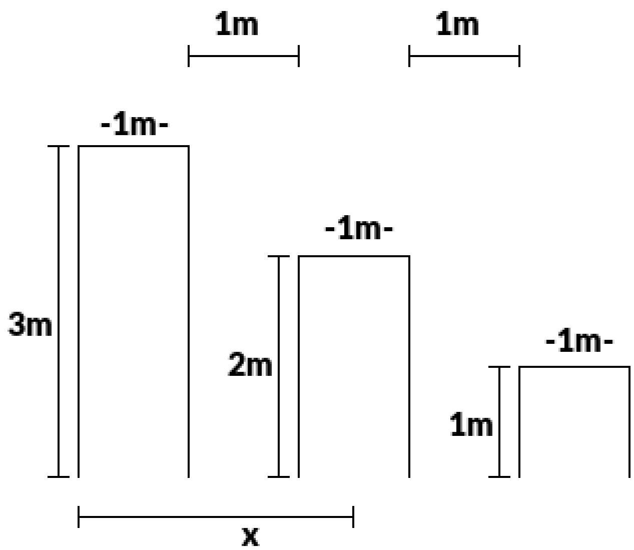
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{2a\cdot(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{b^2-b^2+4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$

Zatem:

$lim_{a\to 0}x_2 = \frac{lim_{a\to 0}2c}{-lim_{a\to 0}b-lim_{a\to 0}\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{2c}{-b-\sqrt{lim_{a\to 0}b^2-lim_{a\to 0}4ac}} = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-0}} = \frac{2c}{-b-b} = -\frac{2c}{2b} = -\frac{c}{b}$

Ostatecznie graniczna wartość jednego miejsca zerowego trójmianu kwadratowego dla $a \to 0$ wynosi $+\infty$ a drugiego $-\frac{c}{b}$.

5.77.



Dla $x \in < 0; 1 >$ zakreślone pole znajduje się we wnętrzu pierwszego prostokąta i wynosi ono $f(x) = 3 \cdot x = 3x$.

Dla $x \in (1; 2)$ zakreślone pole obejmuje wyłącznie cały pierwszy prostokąt, więc wynosi ono $f(x) = 3 \cdot 1 = 3$.

Dla $x \in < 2; 3 >$ zakreślone pole obejmuje cały pierwszy prostokąt i część drugiego. Wynosi ono $f(x) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (x - 2) = 3 + 2x - 4 = 2x - 1$.

Dla $x \in (3; 4)$ zakreślone pole obejmuje cały pierwszy i drugi prostokąt, zatem wynosi ono $f(x) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5$.

Dla $x \in < 4; 5 >$ zakreślone pole obejmuje cały pierwszy i drugi prostokąt oraz część trzeciego, i wynosi ono:

$f(x) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (x - 4) = 3 + 2 + x - 4 = x + 1$.

Dla $x \in (5; +\infty)$ zakreślone pole obejmuje wszystkie trzy prostokąty i wynosi ono:

$f(x) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 + 2 + 1 = 6$.

Ostatecznie funkcja wyrażająca zakreślone pole w zależności od zmiennej x wygląda następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & dla \quad x \in < 0; 1 > \\ 3 & dla \quad x \in (1; 2) \\ 2x-1 & dla \quad x \in < 2; 3 > \\ 5 & dla \quad x \in (3; 4) \\ x+1 & dla \quad x \in < 4; 5 > \\ 6 & dla \quad x \in (5; +\infty) \end{cases}$$

Funkcja $f(x)$ jest ciągła we wszystkich podanych przedziałach. Zbadajamy jej ciągłość na krańcach tych przedziałów:

$x = 1$:

$lim_{x \to 1-0} f(x) = lim_{x \to 1-0} 3x = 3 \cdot 1 = 3$

$lim_{x \to 1+0} f(x) = lim_{x \to 1+0} 3 = 3$

Granice lewostronna i prawostronna w tym punkcie są sobie równe a więc funkcja $f(x)$ jest ciągła w tym punkcie.

$x = 2$:

$lim_{x \to 2-0} f(x) = lim_{x \to 2-0} 3 = 3$

$lim_{x \to 2+0} f(x) = lim_{x \to 2+0} (2x-1) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Granice lewostronna i prawostronna w tym punkcie są sobie równe a więc funkcja $f(x)$ jest ciągła w tym punkcie.

$x = 3$:

$lim_{x \to 3-0} f(x) = lim_{x \to 3-0} (2x-1) = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

$lim_{x \to 3+0} f(x) = lim_{x \to 3+0} 5 = 5$

Granice lewostronna i prawostronna w tym punkcie są sobie równe a więc funkcja $f(x)$ jest ciągła w tym punkcie.

$x = 4$:

$lim_{x \to 4-0} f(x) = lim_{x \to 4-0} 5 = 5$

$lim_{x \to 4+0} f(x) = lim_{x \to 4+0} (x+1) = 4 + 1 = 5$

Granice lewostronna i prawostronna w tym punkcie są sobie równe a więc funkcja $f(x)$ jest ciągła w tym punkcie.

$x = 5$:

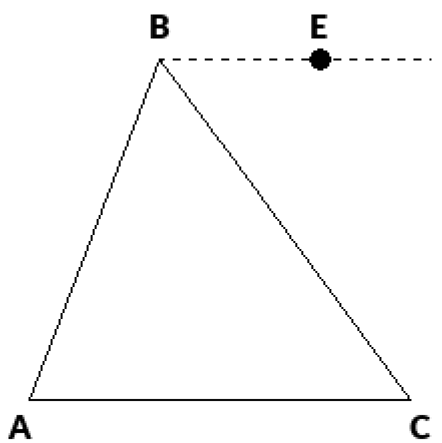
$lim_{x\to 5-0} f(x) = lim_{x\to 5-0}(x+1) = 5+1 = 6$

$lim_{x\to 5+0} f(x) = lim_{x\to 5+0} 6 = 6$

Granice lewostronna i prawostronna w tym punkcie są sobie równe a więc funkcja $f(x)$ jest ciągła w tym punkcie.

Zatem ostatecznie podsumowując powyższe obliczenia funkcja $f(x)$ jest ciągła w całej swojej dziedzinie: $x \in < 0; +\infty)$

5.78.



Przyjmijmy, że punkty A, B, C mają następujące współrzędne:

$A = (x_1, y_1)$

$B = (x_2, y_2)$

$C = (x_3, y_3)$

oraz, że współrzędna x_2 punktu B zmienia się o $x \in < 0; +\infty)$. Zatem punkt B przyjmuje współrzędne $B = (x_2 + x, y_2)$ a boki trójkąta ΔABC wynoszą:

$|AB| = \sqrt{(x_2 + x - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$|BC| = \sqrt{(x_3 - x_2 - x)^2 + (y_3 - y_2)^2}$

$|AC| = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

Obliczmy teraz granice długości boków przy $x \to +\infty$:

$lim_{x\to\infty}|AB| = lim_{x\to\infty}\sqrt{(x_2+x-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{lim_{x\to\infty}(x_2+x-x_1)^2+lim_{x\to\infty}(y_2-y_1)^2} =$

$= \sqrt{+\infty+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

$lim_{x\to\infty}|BC| = lim_{x\to\infty}\sqrt{(x_3-x_2-x)^2+(y_3-y_2)^2} = \sqrt{lim_{x\to\infty}(x_3-x_2-x)^2+lim_{x\to\infty}(y_3-y_2)^2} =$

$= \sqrt{(-\infty)^2+(y_3-y_2)^2} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

Natomiast bok $|AC|$ nie zależy od położenia punktu B, więc jego długość jest stała.

$|AC| = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$

Zbadajmy teraz kąt α między wektorami $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$, korzystając z wzoru:

$cos\alpha = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{|w_1^{\rightarrow}|\cdot|w_2^{\rightarrow}|}, \qquad w_1^{\rightarrow} = [a_1, b_1] \qquad w_2^{\rightarrow} = [a_2, b_2]$

$w_1^{\rightarrow} = AB^{\rightarrow}, \qquad w_2^{\rightarrow} = AC^{\rightarrow}$

$w_1^{\rightarrow} = [x_2+x-x_1,\ y_2-y_1]$

$w_2^{\rightarrow} = [x_3-x_1,\ y_3-y_1]$

$|w_1^{\rightarrow}| = \sqrt{(x_2+x-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$|w_2^{\rightarrow}| = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$

$lim_{x\to\infty}cos\alpha = lim_{x\to\infty}\frac{(x_2+x-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)}{\sqrt{(x_2+x-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\cdot\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}} = (1)$

Podstawmy: $k = x_2-x_1, \quad l = x_3-x_1, \quad m = y_2-y_1, \quad n = y_3-y_1$

$(1) = lim_{x\to\infty}\frac{(k+x)\cdot l+m\cdot n}{\sqrt{(k+x)^2+m^2}\cdot\sqrt{l^2+n^2}} = lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(k+x)\cdot l}{k+x}+\frac{m\cdot n}{k+x}}{\frac{1}{k+x}\cdot\sqrt{(k+x)^2+m^2}\cdot\sqrt{l^2+n^2}} = lim_{x\to\infty}\frac{l+\frac{m\cdot n}{k+x}}{\sqrt{\frac{(k+x)^2}{(k+x)^2}+\frac{m^2}{(k+x)^2}}\cdot\sqrt{l^2+n^2}} =$

$= \frac{l+0}{\sqrt{1+0}\cdot\sqrt{l^2+n^2}} = \frac{l}{\sqrt{l^2+n^2}} = \frac{x_3-x_1}{|AC^{\rightarrow}|} = cos\beta$

gdzie β jest kątem wektora $AC^{\rightarrow}$ z osią $Ox^{\rightarrow}$

$\Downarrow$

$AB^{\rightarrow}$ dąży do $Ox^{\rightarrow}$

$\Downarrow$

$\alpha \to 0°$

Zbadajmy teraz kąt γ między wektorami $CA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ korzystając z tego samego wzoru co poprzednio:

$w_1^{\rightarrow} = CA^{\rightarrow}, \qquad w_2^{\rightarrow} = CB^{\rightarrow}$

$w_1^{\rightarrow} = [x_1-x_3,\ y_1-y_3]$

$w_2^{\rightarrow} = [x_2+x-x_3,\ y_2-y_3]$

$|\vec{w_1}| = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$

$|\vec{w_2}| = \sqrt{(x_2 + x - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$

$lim_{x\to\infty} cos\gamma = lim_{x\to\infty} \frac{(x_1-x_3)(x_2+x-x_3)+(y_1-y_3)(y_2-y_3)}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}\cdot\sqrt{(x_2+x-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}} = (2)$

Podstawmy: $k = x_1 - x_3, \quad l = x_2 - x_3, \quad m = y_1 - y_3, \quad n = y_2 - y_3$

$(2) = lim_{x\to\infty} \frac{k\cdot(l+x)+m\cdot n}{\sqrt{k^2+m^2}\cdot\sqrt{(l+x)^2+n^2}} = lim_{x\to\infty} \frac{\frac{k\cdot(l+x)}{l+x}+\frac{m\cdot n}{l+x}}{\sqrt{k^2+m^2}\cdot\frac{1}{l+x}\cdot\sqrt{(l+x)^2+n^2}} = lim_{x\to\infty} \frac{k+\frac{m\cdot n}{l+x}}{\sqrt{k^2+m^2}\cdot\sqrt{\frac{(l+x)^2}{(l+x)^2}+\frac{n^2}{(l+x)^2}}} =$

$= \frac{k+0}{\sqrt{k^2+m^2}\cdot\sqrt{1+0}} = \frac{k}{\sqrt{k^2+m^2}} = \frac{x_1-x_3}{|\vec{CA}|} = cos\beta_2$

gdzie β_2 jest kątem wektora $\vec{CA}$ z osią $\vec{Ox}$

$\Downarrow$

$\vec{CB}$ dąży do $\vec{Ox}$

$\Downarrow$

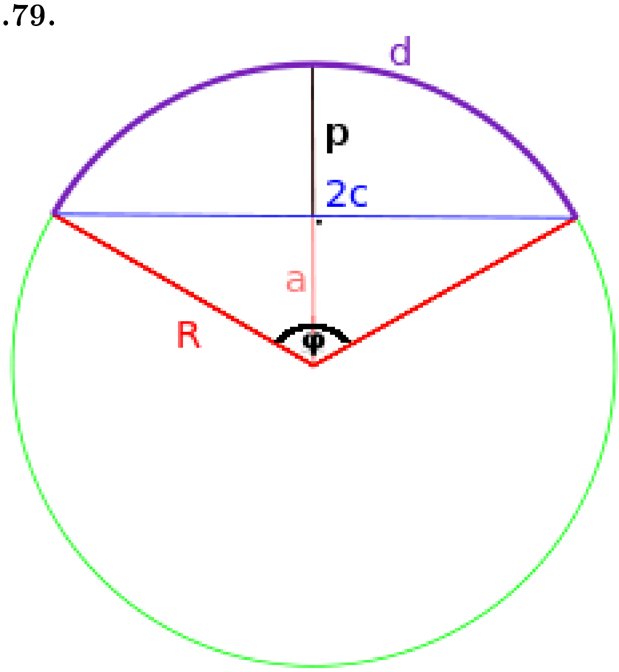
$\gamma \to 180°$

Skoro zaś $\angle BAC \to 0°$ i $\angle BCA \to 180°$, więc $\angle ABC \to 0°$

Zatem podsumowując, gdy wierzchołek B przesuwa się coraz dalej w prawo na osi BE to:

$|AB| \to +\infty, \quad |BC| \to +\infty, \quad |AC| = const$ oraz $\angle BAC \to 0°, \quad \angle BCA \to 180°, \quad \angle ABC \to 0°.$

5.79.



Stosując tw. Pitagorasa do trójkąta prostokątnego o bokach: a, c, R i kącie $\frac{\varphi}{2}$ mamy:

$a^2 + c^2 = R^2$

ale $a = R - p$, więc

$(R - p)^2 + c^2 = R^2$

$R^2 - 2Rp + p^2 + c^2 = R^2 \quad / - R^2$

$p^2 - 2Rp + c^2 = 0$

Znajdźmy teraz rozwiązania tego równania p_{r1}i p_{r2}:

$\Delta = (-2R)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 4R^2 - 4c$

$p_{r1} = \frac{-(-2R)-\sqrt{\Delta}}{2\cdot 1} = \frac{2R-\sqrt{4(R^2-c^2)}}{2} = \frac{2R-2\sqrt{R^2-c^2}}{2} = R - \sqrt{R^2 - c^2}$

$p_{r2} = \frac{-(-2R)+\sqrt{\Delta}}{2\cdot 1} = \frac{2R+\sqrt{4(R^2-c^2)}}{2} = \frac{2R+2\sqrt{R^2-c^2}}{2} = R + \sqrt{R^2 - c^2}$

Ale $p_{r2} > R$, więc to rozwiązanie odpada (bo strzałka łuku musi być mniejsza od promienia).

Zatem ostatecznie:

$p = R - \sqrt{R^2 - c^2}$

Wyraźmy teraz długość strzałki p w zależności od kąta φ. W tym celu weźmy pod uwagę ten sam trójkąt co poprzednio. Mamy:

$\frac{c}{R} = sin\frac{\varphi}{2}$

zatem:

$p = R - \sqrt{R^2 - c^2} = R - \sqrt{R^2(1 - \frac{c^2}{R^2})} = R - R\sqrt{1 - (\frac{c}{R})^2} = R - R\sqrt{1 - sin^2\frac{\varphi}{2}} =$(korzystając z wzoru $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$) $=$

$= R - R\sqrt{sin^2\frac{\varphi}{2} + cos^2\frac{\varphi}{2} - sin^2\frac{\varphi}{2}} = R - R\sqrt{cos^2\frac{\varphi}{2}} = R - R \cdot cos\frac{\varphi}{2} = R(1 - cos\frac{\varphi}{2})$

Ostatecznie mamy:

$p = R(1 - cos\frac{\varphi}{2})$

$p_1 = R(1 - cos\frac{\frac{\varphi}{2}}{2}) = R(1 - cos\frac{\varphi}{4})$

oraz

$lim_{\varphi\to 0}\frac{p}{p_1} = lim_{\varphi\to 0}\frac{R(1-cos\frac{\varphi}{2})}{R(1-cos\frac{\varphi}{4})} = lim_{\varphi\to 0}\frac{1-cos\frac{\varphi}{2}}{1-cos\frac{\varphi}{4}} =$ (korzystając z wzoru $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$) $=$

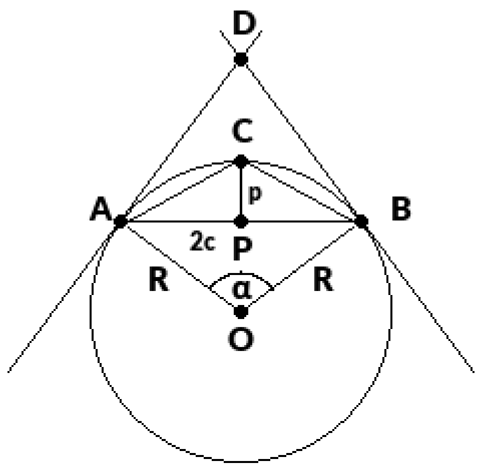
$= lim_{\varphi\to 0}\frac{1-(cos^2\frac{\varphi}{4}-sin^2\frac{\varphi}{4})}{1-cos\frac{\varphi}{4}} = lim_{\varphi\to 0}\frac{sin^2\frac{\varphi}{4}+cos^2\frac{\varphi}{4}-(cos^2\frac{\varphi}{4}-sin^2\frac{\varphi}{4})}{1-cos\frac{\varphi}{4}} = lim_{\varphi\to 0}\frac{sin^2\frac{\varphi}{4}+cos^2\frac{\varphi}{4}-cos^2\frac{\varphi}{4}+sin^2\frac{\varphi}{4}}{1-cos\frac{\varphi}{4}} =$

$= lim_{\varphi\to 0}\frac{2sin^2\frac{\varphi}{4}}{1-cos\frac{\varphi}{4}} = lim_{\varphi\to 0}2 \cdot lim_{\varphi\to 0}\frac{1-cos^2\frac{\varphi}{4}}{1-cos\frac{\varphi}{4}} = 2 \cdot lim_{\varphi\to 0}\frac{(1-cos\frac{\varphi}{4})(1+cos\frac{\varphi}{4})}{1-cos\frac{\varphi}{4}} =$

$= 2 \cdot lim_{\varphi\to 0}\frac{1-cos\frac{\varphi}{4}}{1-cos\frac{\varphi}{4}} \cdot lim_{\varphi\to 0}(1 + cos\frac{\varphi}{4}) = 2 \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4$

Zatem stosunek strzałek $\frac{p}{p_1}$ dla $\varphi \to 0$ wynosi 4.

5.80.



$\alpha \to 0,\ \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABD}} =?$

Na podstawie poprzedniego zadania (5.79) strzałka p ma długość:

$p = R(1 - cos\frac{\alpha}{2})$

Zatem pole trójkąta ΔABC wynosi:

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot p = cR(1 - cos\frac{\alpha}{2})$

Weźmy teraz pod uwagę trójkąt ΔOBD. Ponieważ jest to trójkąt prostokątny, więc zachodzi:

$\frac{R}{|OD|} = cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow |OD| = \frac{R}{cos\frac{\alpha}{2}}$

Ponadto:

$|OP| = R - p$

Zatem:

$|DP| = |OD| - |OP|$

$|DP| = \frac{R}{cos\frac{\alpha}{2}} - (R - p)$

$|DP| = \frac{R}{cos\frac{\alpha}{2}} - (R - R(1 - cos\frac{\alpha}{2}))$

$|DP| = \frac{R}{cos\frac{\alpha}{2}} - R + R(1 - cos\frac{\alpha}{2})$

$|DP| = R(\frac{1}{cos\frac{\alpha}{2}} - 1 + (1 - cos\frac{\alpha}{2}))$

$|DP| = R(\frac{1}{cos\frac{\alpha}{2}} - cos\frac{\alpha}{2})$

A więc pole trójkąta ΔABD wynosi:

$P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |DP|$

$P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot R(\frac{1}{cos\frac{\alpha}{2}} - cos\frac{\alpha}{2})$

$P_{\Delta ABD} = cR(\frac{1}{cos\frac{\alpha}{2}} - cos\frac{\alpha}{2})$

Stosunek pól trójkątów szukany w zadaniu wynosi:

$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABD}} = \frac{cR(1-cos\frac{\alpha}{2})}{cR(\frac{1}{cos\frac{\alpha}{2}}-cos\frac{\alpha}{2})} = \frac{1-cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{cos\frac{\alpha}{2}}-cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1-cos^2\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{cos\frac{\alpha}{2}\cdot(1-cos\frac{\alpha}{2})}{1-cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{cos\frac{\alpha}{2}\cdot(1-cos\frac{\alpha}{2})}{(1+cos\frac{\alpha}{2})(1-cos\frac{\alpha}{2})}$

Natomiast granica powyższego stosunku pól przy $\alpha \to 0$ wynosi:

$lim_{\alpha\to 0}\frac{cos\frac{\alpha}{2}\cdot(1-cos\frac{\alpha}{2})}{(1+cos\frac{\alpha}{2})(1-cos\frac{\alpha}{2})} = lim_{\alpha\to 0}\frac{cos\frac{\alpha}{2}}{(1+cos\frac{\alpha}{2})} \cdot lim_{\alpha\to 0}\frac{1-cos\frac{\alpha}{2}}{1-cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1+1} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

5.81.

W temperaturze $t = 0^\circ$ woda zamarza i występuje jako lód oraz topnieje i występuje jako woda zatem $f(0^\circ) = 2$.

W temperaturze $t < 0^\circ$ woda występuje tylko jako lód. Zatem granica lewostronna w punkcie $t = 0^\circ$ wynosi 1.

W temperaturze $0^\circ < t < 100^\circ$ woda występuje tylko jako woda, więc granica prawostronna w punkcie $t = 0^\circ$ wynosi 1.

Funkcja $f(t)$ jest w punkcie $t = 0^\circ$ nieciągła, gdyż jej wartość w tym punkcie jest różna od granicy lewostronnej i prawostronnej.