6.177.

$y = ln(sinx)$ dla $sinx > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.7, 6.1.11, 6.1.21 oraz $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$

$y' = [ln(sinx)]' = \frac{1}{sinx} \cdot (sinx)' = \frac{cosx}{sinx} = ctgx$

6.178.

$y = ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ dla $0 \leqslant x < 1$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.2, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.21 oraz

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$y' = (ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})' = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} \cdot (\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})' = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{(1+\sqrt{x})' \cdot (1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) \cdot (1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{(0+\frac{1}{2\sqrt{x}})' \cdot (1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) \cdot (0 - \frac{1}{2\sqrt{x}})'}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} =$

$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2})}{1^2 - (\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1-x} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{1-x} = \frac{1}{(1-x) \cdot \sqrt{x}},$ dla $x \neq 0$

6.179 a.

$y = ln(1 + \frac{a}{x})$ dla $x \neq 0 \ \wedge \ 1 + \frac{a}{x} > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.21

$y' = [ln(1 + \frac{a}{x})]' = \frac{1}{1+\frac{a}{x}} \cdot (1 + \frac{a}{x})' = \frac{x}{x+a} \cdot (0 + a \cdot (x^{-1})'] = \frac{x}{x+a} \cdot (-a \cdot x^{-2}) = -\frac{ax}{(x+a) \cdot x^2} = -\frac{a}{x \cdot (x+a)}$

6.179 b.

$y = ln(e^{mx} + e^{-mx})$ dla $e^{mx} + e^{-mx} > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.3, 6.1.4, 6.1.10, 6.1.19, 6.1.21

$y' = [ln(e^{mx} + e^{-mx})]' = \frac{1}{e^{mx}+e^{-mx}} \cdot (e^{mx} + e^{-mx})' = \frac{1}{e^{mx}+e^{-mx}} \cdot [(e^{mx})' + (e^{-mx})'] = \frac{1}{e^{mx}+e^{-mx}} \cdot [e^{mx} \cdot (mx)' +$

$+ e^{-mx} \cdot (-mx)'] = \frac{1}{e^{mx}+e^{-mx}} \cdot [e^{mx} \cdot m + e^{-mx} \cdot (-m)] = \frac{1}{e^{mx}+e^{-mx}} \cdot (e^{mx} \cdot m - me^{-mx}) = m \cdot \frac{e^{mx}-e^{-mx}}{e^{mx}+e^{-mx}}$

6.180.

$y = log_x(lnx)$ dla $x > 0 \ \wedge \ lnx > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.6, 6.1.7, 6.1.21, 6.1.22 oraz $log_a b = \frac{log_A b}{log_A a}$

$y' = [log_x(lnx)]' = (\frac{log_e(lnx)}{log_e x})' = (\frac{ln(lnx)}{lnx})' = \frac{[ln(lnx)]' \cdot lnx - ln(lnx) \cdot (lnx)'}{(lnx)^2} = \frac{\frac{1}{lnx} \cdot (lnx)' \cdot lnx - ln(lnx) \cdot \frac{1}{x}}{(lnx)^2} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot ln(lnx)}{(lnx)^2} =$
$= \frac{1 - ln(lnx)}{x(lnx)^2}$

6.181.

$y = log_x a$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.3, 6.1.10, 6.1.21 oraz $log_a b = \frac{log_A b}{log_A a}$

$y' = (log_x a)' = (\frac{log_e a}{log_e x})' = (\frac{lna}{lnx})' = lna \cdot [(lnx)^{-1}]' = lna \cdot (-1) \cdot (lnx)^{-2} \cdot (lnx)' = -lna \cdot \frac{1}{(lnx)^2} \cdot \frac{1}{x} =$
$= -\frac{lna}{x \cdot (lnx)^2}$

6.182.

$y = x^{5x}$ dla $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.3, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.19 oraz

$a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b$

Mamy $x = e^{lnx}$, zatem:

$y' = (x^{5x})' = [(e^{lnx})^{5x}]' = (e^{5xlnx})' = e^{5xlnx} \cdot (5xlnx)' = e^{5xlnx} \cdot 5 \cdot [x' \cdot lnx + x \cdot (lnx)'] =$

$= 5 \cdot x^{5x} \cdot (1 \cdot lnx + x \cdot \frac{1}{x}) = 5 \cdot x^{5x} \cdot (lnx + 1)$

6.183.

$y = 10x^{-3x}$,dla $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.3, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.19, 6.1.21 oraz

$a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b$

Mamy $x = e^{lnx}$, zatem:

$y' = (10x^{-3x})' = 10 \cdot (x^{-3x})' = 10 \cdot [(e^{lnx})^{-3x}]' = 10 \cdot (e^{-3xlnx})' = 10 \cdot e^{-3xlnx} \cdot (-3xlnx)' =$

$= -30 \cdot e^{-3xlnx} \cdot (xlnx)' = -30 \cdot e^{-3xlnx} \cdot [x' \cdot lnx + x \cdot (lnx)'] = -30 \cdot (e^{lnx})^{-3x} \cdot (lnx + x \cdot \frac{1}{x}) =$

$= -30x^{-3x} \cdot (lnx + 1)$

6.184.

$y = x^{sinx}$, dla $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.7, 6.1.11, 6.1.19, 6.1.21 oraz

$a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b$

Mamy $x = e^{lnx}$, zatem:

$y' = (x^{sinx})' = [(e^{lnx})^{sinx}]' = (e^{sinx \cdot lnx})' = e^{lnx \cdot sinx} \cdot (sinx \cdot lnx)' = x^{sinx} \cdot [(sinx)' \cdot lnx + sinx \cdot (lnx)'] =$

$= x^{sinx} \cdot (cosx \cdot lnx + sinx \cdot \frac{1}{x})$

6.185.

$y = 3x^{cosx}$, dla $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.3, 6.1.7, 6.1.12, 6.1.19, 6.1.21 oraz

$a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b$

Mamy $x = e^{lnx}$, zatem:

$y' = (3x^{cosx})' = 3 \cdot (x^{cosx})' = 3 \cdot [(e^{lnx})^{cosx}]' = 3 \cdot (e^{lnx \cdot cosx})' = 3 \cdot e^{lnx \cdot cosx} \cdot (lnx \cdot cosx)' =$

$= 3x^{cosx} \cdot [(lnx)' \cdot cosx + lnx \cdot (cosx)'] = 3x^{cosx} \cdot (\frac{1}{x} \cdot cosx - lnx \cdot sinx)$

6.186.

$y = (\frac{a}{x})^x$, dla $a > 0 \quad \wedge \quad x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.3, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.19, 6.1.20, 6.1.21 oraz

$a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b, \qquad log_a b - log_a c = log_a \frac{b}{c}$

Mamy $x = e^{lnx}$, zatem:

$y' = [(\frac{a}{x})^x]' = (\frac{a^x}{x^x})' = \frac{(a^x)' \cdot x^x - a^x \cdot (x^x)'}{(x^x)^2} = \frac{(a^x \cdot lna) \cdot x^x - (a^x)[(e^{lnx})^x]'}{x^{2x}} = \frac{(ax)^x \cdot lna - a^x (e^{x \cdot lnx})'}{x^{2x}} = \frac{a^x [x^x \cdot lna - e^{x \cdot lnx} \cdot (x \cdot lnx)']}{x^{2x}} =$

$= \frac{a^x [x^x \cdot lna - (e^{lnx})^x \cdot (x' \cdot lnx + x \cdot (lnx)')]}{x^{2x}} = \frac{a^x [x^x \cdot lna - x^x \cdot (1 \cdot lnx + x \cdot \frac{1}{x})]}{x^{2x}} = \frac{a^x \cdot x^x (lna - lnx - 1)]}{x^{2x}} = (\frac{a}{x})^x \cdot (lna - lnx - 1) =$

$= (\frac{a}{x})^x \cdot (ln\frac{a}{x} - 1)$

6.187.

$y = x^{\frac{1}{x}}$, dla $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.5, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.19, 6.1.21 oraz

$a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b$

Mamy $x = e^{lnx}$, zatem:

$y' = (x^{\frac{1}{x}})' = [(e^{lnx})^{\frac{1}{x}}]' = (e^{\frac{1}{x} \cdot lnx})' = e^{\frac{1}{x} \cdot lnx} \cdot (\frac{1}{x} \cdot lnx)' = (e^{lnx})^{\frac{1}{x}} \cdot [(x^{-1})' \cdot lnx + \frac{1}{x} \cdot (lnx)'] =$

$= x^{\frac{1}{x}} \cdot (-1 \cdot x^{-2} \cdot lnx + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}) = x^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2} \cdot lnx + \frac{1}{x^2}) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (-lnx + 1) = x^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-2} \cdot (1 - lnx) =$

$= x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - lnx)$

6.188.

$y = a^{lnx}$, dla $a > 0 \ \wedge \ x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.7, 6.1.20, 6.1.21 oraz

$a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b$

$y' = (a^{lnx})' = (a^{lnx} \cdot lna) \cdot (lnx)' = lna \cdot a^{lnx} \cdot \frac{1}{x} = (1)$

Mamy $a = e^{lna}$, zatem $a^{lnx} = (e^{lna})^{lnx} = (e^{lnx})^{lna} = x^{lna}$ i ostatecznie:

$(1) = lna \cdot x^{lna} \cdot x^{-1} = lna \cdot x^{lna - 1}$

6.189.

$y = 5^{ln(2x)}$, dla $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.3, 6.1.7, 6.1.20, 6.1.21 oraz

$a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b, \qquad a^{lnb} = b^{lna}$

$y' = (5^{ln(2x)})' = 5^{ln(2x)} \cdot ln5 \cdot [ln(2x)]' = ln5 \cdot 5^{ln(2x)} \cdot \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = ln5 \cdot 5^{ln(2x)} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot 1 =$

$= ln5 \cdot 5^{ln(2x)} \cdot \frac{1}{x} = ln5 \cdot 5^{ln(2x)} \cdot x^{-1} = ln5 \cdot (e^{ln5})^{ln(2x)} \cdot x^{-1} = ln5 \cdot (e^{ln(2x)})^{ln5} \cdot x^{-1} =$

$= ln5 \cdot (2x)^{ln5} \cdot x^{-1} = ln5 \cdot 2^{ln5} \cdot x^{ln5} \cdot x^{-1} = 2^{ln5} \cdot ln5 \cdot x^{ln5 - 1} = 5^{ln2} \cdot ln5 \cdot x^{ln5 - 1}$

6.190.

$y = x^{\frac{1}{lnx}}$, dla $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.2 oraz $a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b$

Mamy: $x = e^{lnx}$, zatem

$y' = (x^{\frac{1}{lnx}})' = [(e^{lnx})^{\frac{1}{lnx}}]' = (e^{lnx \cdot \frac{1}{lnx}})' = e' = 0$

6.191.

$y = (sinx)^{cosx}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.2, 6.1.4, 6.1.5, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11, 6.1.19, 6.1.21

oraz $a^{log_a b} = b \quad \Rightarrow \quad e^{lnb} = b, \qquad cos^2x = 1 - sin^2x$

$y = (sinx)^{cosx} = (sinx)^{\sqrt{1-sin^2x}}$

Podstawmy $u = sinx$: $\qquad y = u^{\sqrt{1-u^2}}$

$\frac{dy}{du} = (u^{\sqrt{1-u^2}})' = [(e^{lnu})^{\sqrt{1-u^2}}]' = e^{lnu \cdot \sqrt{1-u^2}} \cdot (lnu \cdot \sqrt{1-u^2})' = u^{\sqrt{1-u^2}} \cdot [(lnu)' \cdot \sqrt{1-u^2} +$

$+ lnu \cdot (\sqrt{1-u^2})'] = u^{\sqrt{1-u^2}} \cdot \{\frac{1}{u} \cdot \sqrt{1-u^2} + lnu \cdot [(1-u^2)^{\frac{1}{2}}]'\} = (1)$

$[(1-u^2)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2} \cdot (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-u^2)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (0 - 2u) = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$

Zatem:

$(1) = u^{\sqrt{1-u^2}} \cdot [\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} + lnu \cdot (-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}})] = u^{\sqrt{1-u^2}} \cdot (\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} - lnu \cdot \frac{u}{\sqrt{1-u^2}})$

I ostatecznie:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = u^{\sqrt{1-u^2}} \cdot (\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} - lnu \cdot \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}) \cdot cosx = (sinx)^{\sqrt{1-sin^2x}} \cdot (\frac{\sqrt{1-sin^2x}}{sinx} - ln(sinx) \cdot \frac{sinx}{\sqrt{1-sin^2x}}) \cdot cosx =$

$= (sinx)^{\sqrt{cos^2x}} \cdot (\frac{\sqrt{cos^2x}}{sinx} - ln(sinx) \cdot \frac{sinx}{\sqrt{cos^2x}}) \cdot cosx = (sinx)^{cosx} \cdot (\frac{cosx}{sinx} - ln(sinx) \cdot \frac{sinx}{cosx}) \cdot cosx =$

$= (sinx)^{cosx} \cdot (\frac{cos^2x}{sinx} - ln(sinx) \cdot sinx)$

6.192.

$y = (arctgx)^x$, $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.5, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.17, 6.1.19, 6.1.21

oraz $e^{lnb} = b$

$y' = [(arctgx)^x]' = [(e^{ln(arctgx)})^x]' = (e^{x \cdot ln(arctgx)})' = e^{x \cdot ln(arctgx)} \cdot [x \cdot ln(arctgx)]' = (e^{ln(arctgx)})^x \cdot$

$\cdot [x' \cdot ln(arctgx) + x \cdot (ln(arctgx))'] = (arctgx)^x \cdot [ln(arctgx) + x \cdot \frac{1}{arctgx} \cdot (arctgx)'] =$

$= (arctgx)^x \cdot [ln(arctgx) + \frac{x}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2}] = (arctgx)^x \cdot [ln(arctgx) + \frac{x}{(1+x^2) \cdot arctgx}]$

6.193.

$y = (tgx)^{sinx}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.5, 6.1.7, 6.1.11, 6.1.13, 6.1.19, 6.1.21

oraz $e^{lnb} = b$, $tgx = \frac{sinx}{cosx}$

$y' = [(tgx)^{sinx}]' = [(e^{ln(tgx)})^{sinx}]' = e^{ln(tgx) \cdot sinx} \cdot (lntgx \cdot sinx)' = (tgx)^{sinx} \cdot [(ln(tgx))' \cdot sinx +$

$+ ln(tgx) \cdot (sinx)'] = (tgx)^{sinx} \cdot [\frac{1}{tgx} \cdot (tgx)' \cdot sinx + ln(tgx) \cdot cosx] = (tgx)^{sinx} \cdot [\frac{cosx}{sinx} \cdot \frac{1}{cos^2x} \cdot sinx +$

$+ cosx \cdot ln(tgx)] = (tgx)^{sinx} \cdot [\frac{cosx}{cos^2x} + cosx \cdot ln(tgx)] = (tgx)^{sinx} \cdot [\frac{1}{cosx} + cosx \cdot ln(tgx)]$

6.194.

$y = (tgx)^{\frac{1}{cosx}}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.5, 6.1.7, 6.1.12, 6.1.13, 6.1.19, 6.1.21

oraz $e^{lnb} = b$, $tgx = \frac{sinx}{cosx}$

$y' = [(tgx)^{\frac{1}{cosx}}]' = [(e^{ln(tgx)})^{\frac{1}{cosx}}]' = (e^{ln(tgx) \cdot \frac{1}{cosx}})' = e^{ln(tgx) \cdot \frac{1}{cosx}} \cdot [ln(tgx) \cdot \frac{1}{cosx}]' = (tgx)^{\frac{1}{cosx}} \cdot$

$\cdot [(ln(tgx))' \cdot \frac{1}{cosx} + ln(tgx) \cdot ((cosx)^{-1})'] = (tgx)^{\frac{1}{cosx}} \cdot [\frac{1}{tgx} \cdot (tgx)' \cdot \frac{1}{cosx} + ln(tgx) \cdot (-1) \cdot (cosx)^{-2} \cdot (cosx)'] =$

$= (tgx^{\frac{1}{cosx}}) \cdot [\frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{cos^2x} \cdot \frac{1}{cosx} + ln(tgx) \cdot (-1) \cdot (cosx)^{-2} \cdot (-sinx)] = (tgx)^{\frac{1}{cosx}} \cdot [\frac{cosx}{sinx} \cdot \frac{1}{cos^3x} + ln(tgx) \cdot \frac{sinx}{cos^2x}] =$

$= (tgx)^{\frac{1}{cosx}} \cdot [\frac{1}{sinx \cdot cos^2x} + ln(tgx) \cdot \frac{sinx}{cos^2x}]$

6.195.

$y = (cosx)^{ctgx}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.5, 6.1.7, 6.1.12, 6.1.14, 6.1.19, 6.1.21

oraz $e^{lnb} = b$, $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$

$y' = [(cosx)^{ctgx}]' = [(e^{ln(cosx)})^{ctgx}]' = (e^{ln(cosx) \cdot ctgx})' = e^{ln(cosx) \cdot ctgx} \cdot [ln(cosx) \cdot ctgx]' =$

$= (cosx)^{ctgx} \cdot [(ln(cosx))' \cdot ctgx + ln(cosx) \cdot (ctgx)'] = (cosx)^{ctgx} \cdot [\frac{1}{cosx} \cdot (cosx)' \cdot \frac{cosx}{sinx} +$

$+ ln(cosx) \cdot (-\frac{1}{sin^2x})] = (cosx)^{ctgx} \cdot [-\frac{sinx}{cosx} \cdot \frac{cosx}{sinx} - \frac{ln(cosx)}{sin^2x}] = (cosx)^{ctgx} \cdot (-1 - \frac{ln(cosx)}{sin^2x}) =$

$= -(cosx)^{ctgx} \cdot (1 + \frac{ln(cosx)}{sin^2x})$

6.196.

$y = e^{e^x}$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.7, 6.1.19

$y' = (e^{e^x})' = e^{e^x} \cdot (e^x)' = e^{e^x} \cdot e^x = e^{e^x + x} = e^{x + e^x}$

6.197.

$y = x^{e^x}, \qquad x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.5, 6.1.7, 6.1.19, 6.1.21 oraz $e^{lnb} = b$

$y' = (x^{e^x})' = [(e^{lnx})^{e^x}] = (e^{lnx \cdot e^x})' = e^{lnx \cdot e^x} \cdot (lnx \cdot e^x)' = e^{lnx \cdot e^x} \cdot [(lnx)' \cdot e^x + lnx \cdot (e^x)'] =$

$= e^{lnx \cdot e^x} \cdot (\frac{1}{x} \cdot e^x + lnx \cdot e^x) = e^{lnx \cdot e^x} \cdot e^x \cdot (\frac{1}{x} + lnx) = e^{lnx \cdot e^x + x} \cdot (\frac{1}{x} + lnx)$

6.198.

$y = x^{x^x}, \qquad x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.5, 6.1.7, 6.1.19, 6.1.21 oraz $e^{lnb} = b$

$y' = (x^{x^x})' = [(e^{lnx})^{x^x}]' = (e^{lnx \cdot x^x})' = e^{lnx \cdot x^x} \cdot (lnx \cdot x^x)' = e^{lnx \cdot x^x} \cdot [(lnx)' \cdot x^x + lnx \cdot (x^x)'] =$

$= e^{lnx \cdot x^x} \cdot [\frac{1}{x} \cdot x^x + lnx \cdot ((e^{lnx})^x)'] = e^{lnx \cdot x^x} \cdot [x^x \cdot \frac{1}{x} + lnx \cdot (e^{x \cdot lnx})'] = e^{lnx \cdot x^x} \cdot [x^x \cdot \frac{1}{x} + lnx \cdot e^{x \cdot lnx} \cdot (x \cdot lnx)'] =$

$= e^{lnx \cdot x^x} \cdot [x^x \cdot \frac{1}{x} + lnx \cdot (e^{lnx})^x \cdot (x' \cdot lnx + x \cdot (lnx)'] = e^{lnx \cdot x^x} \cdot [x^x \cdot \frac{1}{x} + lnx \cdot x^x \cdot (lnx + x \cdot \frac{1}{x})] =$

$= e^{lnx \cdot x^x} \cdot x^x \cdot [\frac{1}{x} + lnx \cdot (lnx + 1)] = x^{x^x} \cdot x^x \cdot [(lnx)^2 + lnx + \frac{1}{x}] = x^{x + x^x} \cdot [(lnx)^2 + lnx + \frac{1}{x}]$

6.199.

$y = (1 + \frac{1}{x})^x, \qquad x \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.2, 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.19, 6.1.21 oraz $e^{lnb} = b$, $lna - lnb = ln\frac{a}{b}$.

$y = (1 + \frac{1}{x})^x = (\frac{x}{x} + \frac{1}{x})^x = (\frac{x+1}{x})^x = \frac{(x+1)^x}{x^x}$

$y' = \frac{[(x+1)^x]' \cdot x^x - (x+1)^x \cdot (x^x)'}{(x^x)^2} = (1)$

Obliczmy teraz następujące pochodne: $[(x+1)^x]'$ oraz $(x^x)'$:

$[(x+1)^x]' = [(e^{ln(x+1)})^x]' = (e^{x \cdot ln(x+1)})' = e^{x \cdot ln(x+1)} \cdot [x \cdot ln(x+1)]' = e^{x \cdot ln(x+1)} \cdot [x' \cdot ln(x+1)+$

$+x \cdot (ln(x+1))'] = e^{x \cdot ln(x+1)} \cdot [ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot (x+1)'] = e^{x \cdot ln(x+1)} \cdot [ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \cdot (1+0)] =$

$= e^{x \cdot ln(x+1)} \cdot [ln(x+1) + \frac{x}{x+1}]$

$(x^x)' = [(e^{lnx})^x]' = (e^{x \cdot lnx})' = e^{x \cdot lnx} \cdot (x \cdot lnx)' = e^{x \cdot lnx} \cdot (x' \cdot lnx + x \cdot (lnx)') = e^{x \cdot lnx} \cdot (lnx + x \cdot \frac{1}{x}) =$

$= e^{x \cdot lnx} \cdot (lnx + 1)$

$(1) = \frac{e^{x \cdot ln(x+1)} \cdot [ln(x+1) + \frac{x}{x+1}] \cdot x^x - (x+1)^x \cdot e^{x \cdot lnx} \cdot (lnx+1)}{(x^x)^2} = \frac{e^{x \cdot ln(x+1)} \cdot [ln(x+1) + \frac{x}{x+1}] \cdot x^x - (x+1)^x \cdot (e^{lnx})^x \cdot (lnx+1)}{(x^x)^2} =$

$= \frac{e^{x \cdot ln(x+1)} \cdot [ln(x+1) + \frac{x}{x+1}] \cdot x^x - (x+1)^x \cdot x^x \cdot (lnx+1)}{(x^x)^2} = \frac{(e^{ln(x+1)})^x \cdot [ln(x+1) + \frac{x}{x+1}] - (x+1)^x \cdot (lnx+1)}{x^x} =$

$= \frac{(x+1)^x \cdot [ln(x+1) + \frac{x}{x+1}] - (x+1)^x \cdot (lnx+1)}{x^x} = \frac{(x+1)^x}{x^x} \cdot [ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - lnx - 1] =$

$= (\frac{x+1}{x})^x \cdot [ln(x+1) - lnx + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1}] = (1 + \frac{1}{x})^x \cdot [ln(\frac{x+1}{x}) + \frac{x-x-1}{x+1}] =$

$= (1 + \frac{1}{x})^x \cdot [ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}]$

6.200.

$y = \sqrt[x]{\frac{1}{x}}, \qquad x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów: 6.1.7, 6.1.10 oraz $e^{lnb} = b$, $lna - lnb = ln\frac{a}{b}$.

$y = \sqrt[x]{\frac{1}{x}} = (\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}, \qquad$ Podstawmy $u = \frac{1}{x}$:

$y = u^u$

Na podstawie obliczeń z zadania 6.199, mamy:

$\frac{dy}{du} = e^{u \cdot lnu} \cdot (lnu + 1)$ oraz $\frac{du}{dx} = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Zatem:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^{u \cdot lnu} \cdot (lnu + 1) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x} \cdot ln\frac{1}{x}} \cdot (ln\frac{1}{x} + 1) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = (e^{ln\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}} \cdot (ln1 - lnx + 1) \cdot (-\frac{1}{x^2}) =$

$= (\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} \cdot (0 - lnx + 1) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = (\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{lnx - 1}{x^2}$