6.201.

$s = 3t^{-\frac{1}{2}}, \qquad t = \frac{1}{4}$

Przy obliczeniach korzystamy z wzoru: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Prędkość średnia dla $t_0 < t < t_0 + \Delta t$ wynosi:

$$v_{śr} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = \frac{3\cdot(t_0+\Delta t)^{-\frac{1}{2}}-3t_0^{-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{3\cdot\frac{1}{\sqrt{t_0+\Delta t}}-3\frac{1}{\sqrt{t_0}}}{\Delta t}$$

Prędkość w chwili $t = t_0$ wynosi:

$$v(t_0) = lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{\sqrt{t_0+\Delta t}}-3\frac{1}{\sqrt{t_0}}}{\Delta t} = 3\cdot lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{t_0}-\sqrt{t_0+\Delta t}}{\Delta t\cdot\sqrt{t_0+\Delta t}\cdot\sqrt{t_0}} =$$
$$= 3\cdot lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\sqrt{t_0}-\sqrt{t_0+\Delta t})\cdot(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0+\Delta t})}{\Delta t\cdot\sqrt{t_0+\Delta t}\cdot\sqrt{t_0}\cdot(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0+\Delta t})} = 3\cdot lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{t_0}^2-\sqrt{t_0+\Delta t}^2}{\Delta t\cdot\sqrt{t_0+\Delta t}\cdot\sqrt{t_0}\cdot(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0+\Delta t})} =$$
$$= 3\cdot lim_{\Delta t\to 0}\frac{t_0-t_0-\Delta t}{\Delta t\cdot\sqrt{t_0+\Delta t}\cdot\sqrt{t_0}\cdot(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0+\Delta t})} = -3\cdot lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta t\cdot\sqrt{t_0+\Delta t}\cdot\sqrt{t_0}\cdot(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0+\Delta t})} =$$
$$= -3\cdot lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t_0+\Delta t}\cdot\sqrt{t_0}\cdot(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0+\Delta t})} = -3\cdot\frac{1}{\sqrt{t_0+0}\cdot\sqrt{t_0}\cdot(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0+0})} = -\frac{3}{\sqrt{t_0}\cdot\sqrt{t_0}\cdot(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0})} =$$
$$= -\frac{3}{t_0\cdot 2\sqrt{t_0}}$$

Zatem:

$$v(\tfrac{1}{4}) = -\frac{3}{\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}} = -\frac{3}{\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{3}{\frac{1}{4}} = -3\cdot 4 = 12$$

6.202.

$s = 10\sqrt{t^3}, \qquad t = 4$

Przy obliczeniach korzystamy z wzorów:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ oraz $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Prędkość średnia dla $t_0 < t < t_0 + \Delta t$ wynosi:

$$v_{śr} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = \frac{10\cdot\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}-10\cdot\sqrt{t_0^3}}{\Delta t} = 10\cdot\frac{(\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}-\sqrt{t_0^3})\cdot(\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}+\sqrt{t_0^3})}{\Delta t\cdot(\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}+\sqrt{t_0^3})} = 10\cdot\frac{\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}^2-\sqrt{t_0^3}^2}{\Delta t\cdot(\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}+\sqrt{t_0^3})} =$$

$$= 10\cdot\frac{(t_0+\Delta t)^3-t_0^3}{\Delta t\cdot(\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}+\sqrt{t_0^3})} = 10\cdot\frac{(t_0+\Delta t-t_0)[(t_0+\Delta t)^2+(t_0+\Delta t)\cdot t_0+t_0^2]}{\Delta t\cdot(\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}+\sqrt{t_0^3})} = 10\cdot\frac{\Delta t\cdot[(t_0+\Delta t)^2+(t_0+\Delta t)\cdot t_0+t_0^2]}{\Delta t\cdot(\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}+\sqrt{t_0^3})} =$$

$$= 10\cdot\frac{(t_0+\Delta t)^2+(t_0+\Delta t)\cdot t_0+t_0^2}{\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}+\sqrt{t_0^3}}$$

Prędkość w chwili $t = t_0$ wynosi:

$v(t_0) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0}(10 \cdot \frac{(t_0+\Delta t)^2+(t_0+\Delta t)\cdot t_0+t_0^2}{\sqrt{(t_0+\Delta t)^3}+\sqrt{t_0^3}}) = 10 \cdot \frac{(t_0+0)^2+(t_0+0)\cdot t_0+t_0^2}{\sqrt{(t_0+0)^3}+\sqrt{t_0^3}} =$
$= 10 \cdot \frac{t_0^2+t_0^2+t_0^2}{\sqrt{t_0^3}+\sqrt{t_0^3}} = 10 \cdot \frac{3t_0^2}{2\sqrt{t_0^3}} = 15 \cdot \frac{t_0^2}{\sqrt{t_0^3}} = 15 \cdot t_0^{2-\frac{3}{2}} = 15t_0^{\frac{1}{2}} = 15\sqrt{t_0}$

Zatem:

$v(4) = 15 \cdot \sqrt{4} = 15 \cdot 2 = 30$

6.203.

$s = 8 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot t^5}, \qquad t = 2$

Przy obliczeniach korzystamy z wzorów:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ oraz $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$

Prędkość średnia dla $t_0 < t < t_0 + \Delta t$ wynosi:

$v_{śr} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = \frac{8\cdot\sqrt[3]{2\cdot(t_0+\Delta t)^5}-8\cdot\sqrt[3]{2t_0^5}}{\Delta t} = 8 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}-\sqrt[3]{t_0^5}}{\Delta t}$

$= 8\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\frac{(\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}-\sqrt[3]{t_0^5})\cdot(\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}^2+\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}\cdot\sqrt[3]{t_0^5}+\sqrt[3]{t_0^5}^2)}{\Delta t\cdot(\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}^2+\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}\cdot\sqrt[3]{t_0^5}+\sqrt[3]{t_0^5}^2)} = 8\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}^3-\sqrt[3]{t_0^5}^3}{\Delta t\cdot(\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}^2+\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}\cdot\sqrt[3]{t_0^5}+\sqrt[3]{t_0^5}^2)} =$
$= 8 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{L}{M}$ (1), gdzie:

$L = \sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}^3 - \sqrt[3]{t_0^5}^3$

$M = \Delta t \cdot (\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}^2 + \sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5} \cdot \sqrt[3]{t_0^5} + \sqrt[3]{t_0^5}^2)$

$L = (t_0+\Delta t)^5 - t_0^5 = ((t_0+\Delta t)-t_0)\cdot[(t_0+\Delta t)^4+(t_0+\Delta t)^3\cdot t_0+(t_0+\Delta t)^2\cdot t_0^2+(t_0+\Delta t)\cdot t_0^3+t_0^4] =$
$= \Delta t \cdot [(t_0+\Delta t)^4+(t_0+\Delta t)^3\cdot t_0+(t_0+\Delta t)^2\cdot t_0^2+(t_0+\Delta t)\cdot t_0^3+t_0^4]$

Zatem: $(1) = 8 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\Delta t\cdot[(t_0+\Delta t)^4+(t_0+\Delta t)^3\cdot t_0+(t_0+\Delta t)^2\cdot t_0^2+(t_0+\Delta t)\cdot t_0^3+t_0^4]}{\Delta t\cdot(\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}^2+\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}\cdot\sqrt[3]{t_0^5}+\sqrt[3]{t_0^5}^2)} =$

$= 8 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{(t_0+\Delta t)^4+(t_0+\Delta t)^3\cdot t_0+(t_0+\Delta t)^2\cdot t_0^2+(t_0+\Delta t)\cdot t_0^3+t_0^4}{\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}^2+\sqrt[3]{(t_0+\Delta t)^5}\cdot\sqrt[3]{t_0^5}+\sqrt[3]{t_0^5}^2}$

Prędkość w chwili $t = t_0$ wynosi:

$v(t_0) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = 8 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{(t_0+0)^4+(t_0+0)^3 \cdot t_0+(t_0+0)^2 \cdot t_0^2+(t_0+0) \cdot t_0^3+t_0^4}{\sqrt[3]{(t_0+0)^5}^2+\sqrt[3]{(t_0+0)^5} \cdot \sqrt[3]{t_0^5}+\sqrt[3]{t_0^5}^2} =$

$= 8 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{t_0^4+t_0^3 \cdot t_0+t_0^2 \cdot t_0^2+t_0 \cdot t_0^3+t_0^4}{\sqrt[3]{t_0^5}^2+\sqrt[3]{t_0^5} \cdot \sqrt[3]{t_0^5}+\sqrt[3]{t_0^5}^2} = 8 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{5t_0^4}{3 \cdot t_0^{\frac{10}{3}}} = \frac{40\sqrt[3]{2}}{3} \cdot t_0^{4-\frac{10}{3}} = \frac{40\sqrt[3]{2}}{3} \cdot t_0^{\frac{12}{3}-\frac{10}{3}} = \frac{40\sqrt[3]{2}}{3} \cdot t_0^{\frac{2}{3}}$

Zatem:

$v(2) = \frac{40\sqrt[3]{2}}{3} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = \frac{40 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{40 \cdot 2}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$

6.204.

$s = \sqrt{3t}, \qquad t = 2$

Przy obliczeniach korzystamy z wzorów:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Prędkość średnia dla $t_0 < t < t_0 + \Delta t$ wynosi:

$v_{śr} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3(t_0+\Delta t)}-\sqrt{3t_0}}{\Delta t} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{t_0+\Delta t}-\sqrt{t_0}}{\Delta t} = \sqrt{3} \cdot \frac{(\sqrt{t_0+\Delta t}-\sqrt{t_0}) \cdot (\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0})}{\Delta t \cdot (\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0})} =$
$= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{t_0+\Delta t}^2-\sqrt{t_0}^2}{\Delta t \cdot (\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0})} = \sqrt{3} \cdot \frac{t_0+\Delta t-t_0}{\Delta t \cdot (\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0})} = \sqrt{3} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t \cdot (\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0}}$

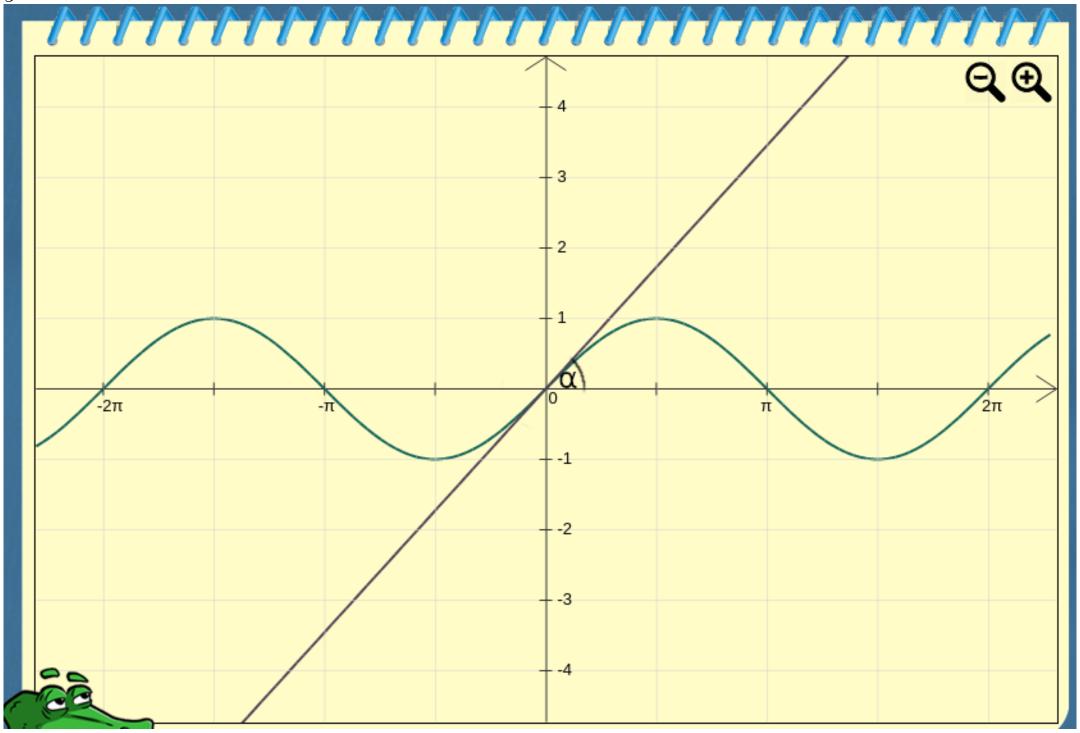
Prędkość w chwili $t = t_0$wynosi:

$v(t_0) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t_0+\Delta t}+\sqrt{t_0}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t_0+0}+\sqrt{t_0}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t_0}}$,zatem

$v(2) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

6.205.

$y = sinx$



Obliczmy najpierw pochodną funkcji $y = sinx$ w początku układu współrzędnych:

$f'(x) = y' = (sinx)' = cosx$

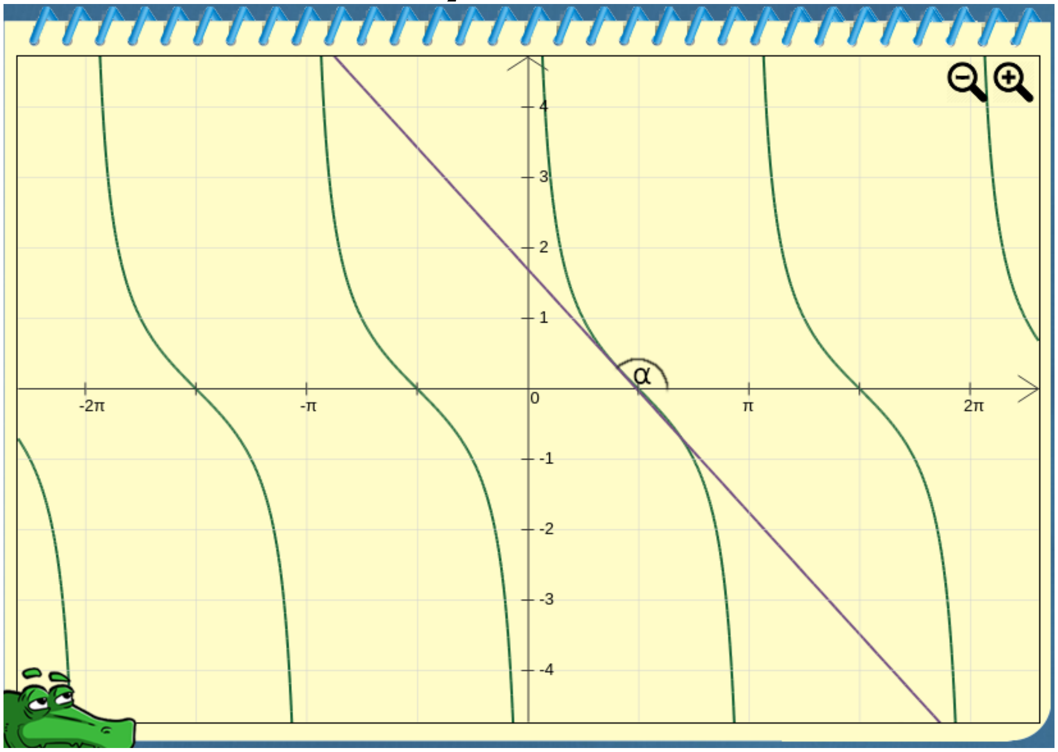
$f'(0) = cos0 = 1$

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie, zatem:

$tg\alpha = f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°$ (bo kąt należy do I ćwiartki układu współrzędnych)

6.206.

$y = ctgx$ w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$



Obliczamy najpierw pochodną funkcji $y = ctgx$ w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$:

$f'(x) = y' = (ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x}$

$f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{sin^2\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{1^2} = -1$

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie, zatem:

$tg\alpha = f'(\frac{\pi}{2}) = -1$

$\Updownarrow \quad tg\alpha = -tg(180° - \alpha)$

$-tg(180° - \alpha) = -1$

$tg(180° - \alpha) = 1$

$\Downarrow \;\; 180° - \alpha \in I\ ćwiartki$

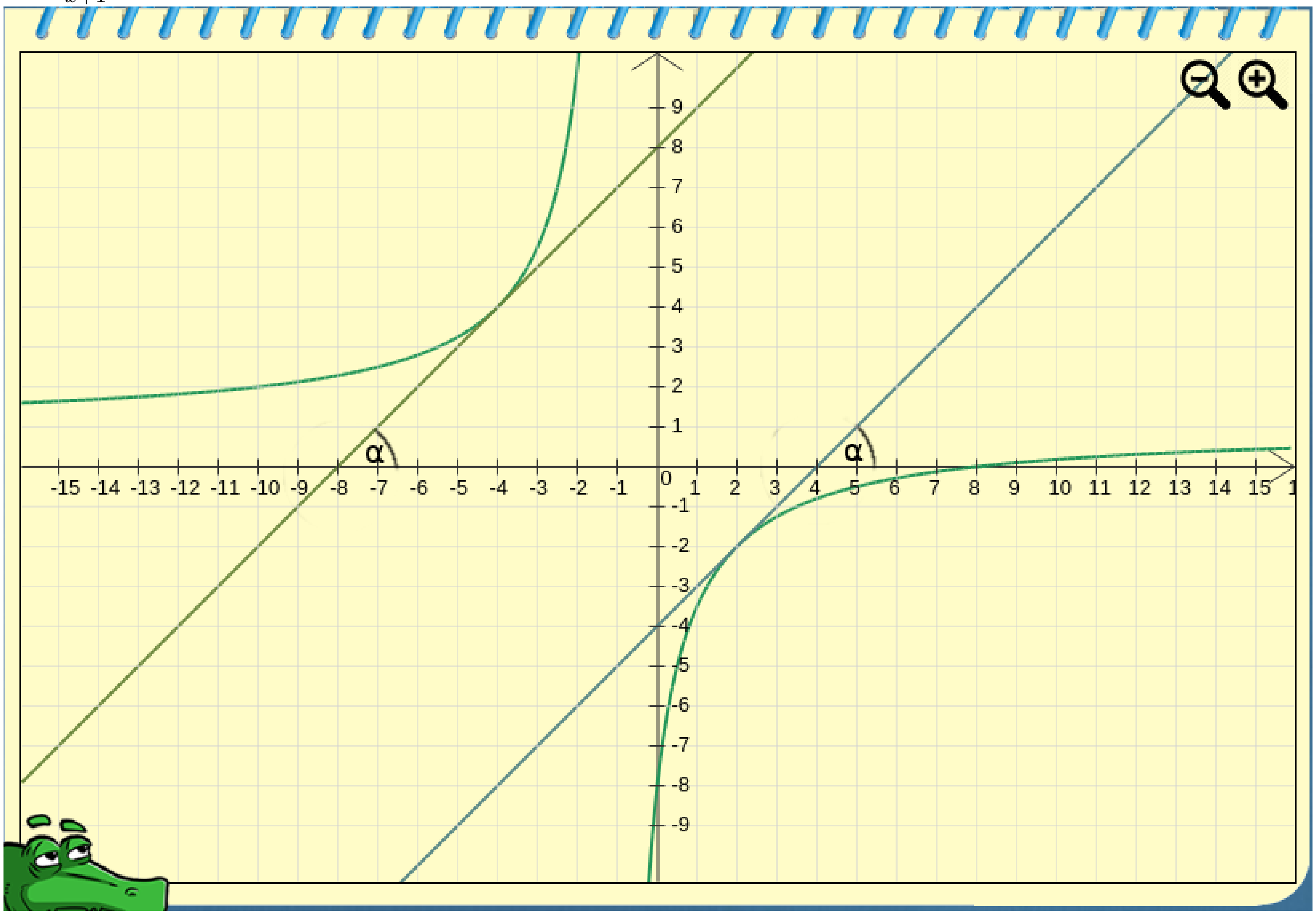
$180° - \alpha = 45°$

$\alpha = 180° - 45°$

$\alpha = 135°$

6.207.

$y = \frac{x-8}{x+1}$ $\qquad \alpha = 45°$ $\quad x = ? \ \wedge \ x \neq -1$



Obliczamy najpierw pochodną funkcji danej w zadaniu:

$y' = (\frac{x-8}{x+1})' = \frac{(x-8)' \cdot (x+1) - (x-8) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-8) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+8}{(x+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2}$

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi

kątowemu stycznej do wykresu w tym punkcie, zatem:

$tg(\alpha) = f'(x)$

$tg(45°) = \frac{9}{(x+1)^2}$

$1 = \frac{9}{(x+1)^2}$

$(x+1)^2 = 9$

$x^2 + 2x + 1 = 9$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2 \cdot 1}$ $\qquad x_2 = \frac{-2+\sqrt{36}}{2 \cdot 1}$

$x_1 = \frac{-2-6}{2}$ $\qquad x_2 = \frac{-2+6}{2}$

$x_1 = \frac{-8}{2}$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \frac{4}{2}$

$x_1 = -4$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 2$

$f(x_1) = \frac{-4-8}{-4+1}$ $\qquad\qquad$ $f(x_2) = \frac{2-8}{2+1}$

$f(x_1) = \frac{-12}{-3}$ $\qquad\qquad$ $f(x_2) = \frac{-6}{3}$

$f(x_1) = 4$ $\qquad\qquad$ $f(x_2) = -2$

Zatem warunki zadania są spełnione w dwóch punktach $(-4, 4)$ oraz $(2, -2)$.

6.208.

$y = e^x$, $\quad (x_0, y_0) =?$, dla którego styczna do wykresu funkcji jest równoległa do prostej $x - y + 7 = 0$

$f'(x) = (e^x)' = e^x$

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu

stycznej do wykresu w tym punkcie, zatem:

$tg(\alpha) = e^{x_0}$

ale styczna powinna być równoległa do prostej $y = x + 7$, więc:

$\alpha = 45°$

$\Downarrow$

$tg(45°) = e^{x_0}$

$1 = e^{x_0}$

$ln1 = lne^{x_0}$

$0 = x_0$

$y_0 = e^{x_0} = e^0 = 1$

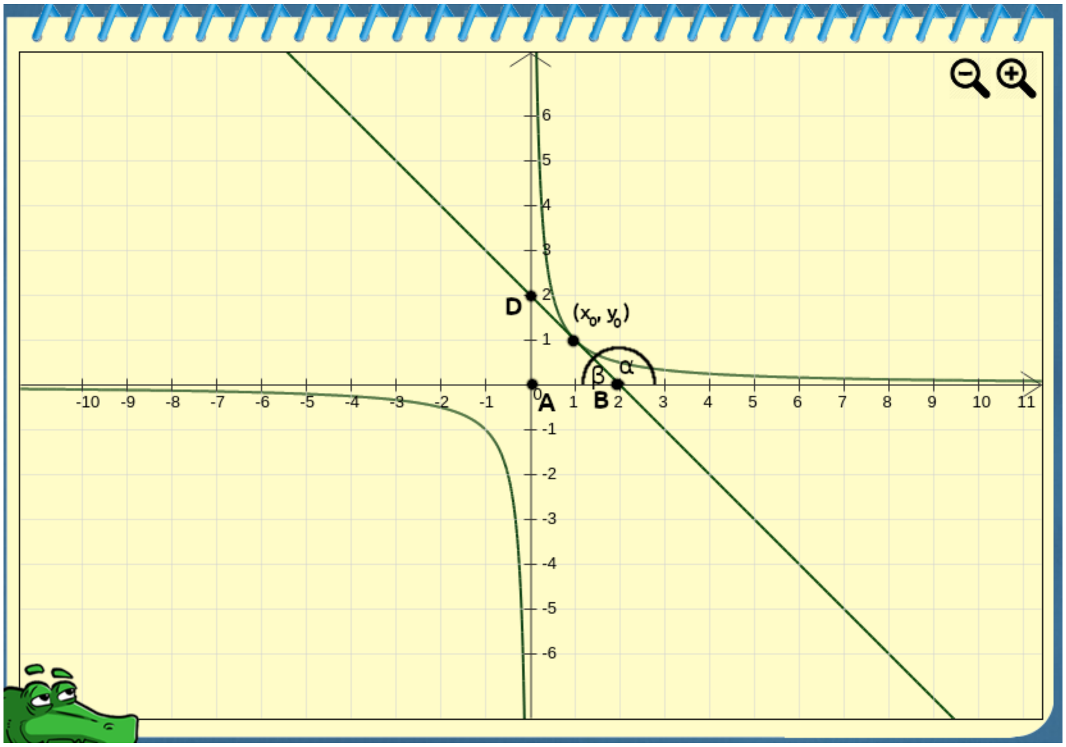
Czyli warunki zadania są spełnione dla punktu $(0, 1)$.

6.209.

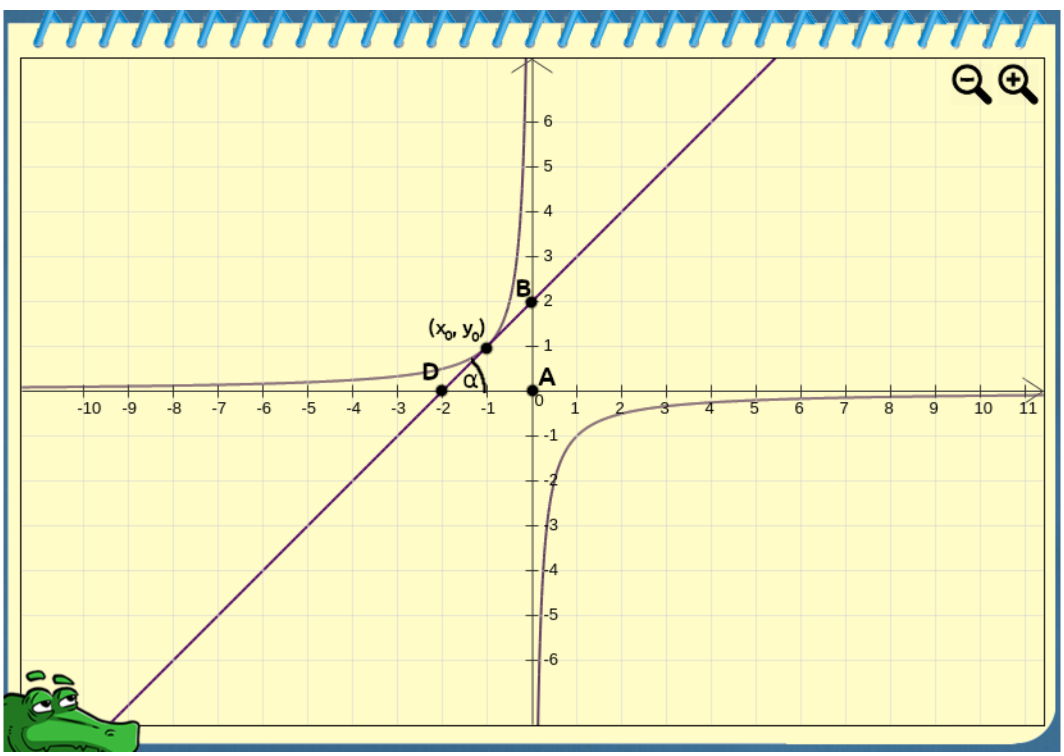
$xy = C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}$, $\qquad$ dla $x \neq 0$

Mamy dwa przypadki:

1. $C > 0$



2. $C < 0$



Najpierw obliczymy pochodną funkcji $y = \frac{C}{x}$:

$y' = (\frac{C}{x})' = C \cdot x^{-1} = C \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{-C}{x^2}, \quad x \neq 0$

Zatem pochodna funkcji w dowolnym punkcie $x = x_0 \neq 0$ jest równa:

$y' = -\frac{C}{x_0^2}$

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie, zatem:

1. $tg\alpha = -\frac{C}{x_0^2}$

   $tg\beta = \frac{|AD|}{|AB|}$

   $tg(180^\circ - \alpha) = \frac{|AD|}{|AB|}$

   $-tg\alpha = \frac{|AD|}{|AB|}$

   $-(-\frac{C}{x_0^2}) = \frac{|AD|}{|AB|}$

   $|AD| = \frac{C}{x_0^2} \cdot |AB|$

   $P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{C}{x_0^2} \cdot |AB|$

   $P_{\Delta ABD} = \frac{C}{2x_0^2} \cdot |AB|^2$

2. $tg\alpha = -\frac{C}{x_0^2}$

   oraz $tg\alpha = \frac{|AB|}{|AD|}$, zatem $\frac{|AB|}{|AD|} = -\frac{C}{x_0^2}$

   $|AB| = -\frac{C}{x_0^2} \cdot |AD|$

   $P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{C}{x_0^2}) \cdot |AD|^2$

   $P_{\Delta ABD} = -\frac{C}{2x_0^2} \cdot |AD|^2$

Dla przypadku 1 ponadto zachodzi:

$tg\beta = \frac{y_0}{|AB| - x_0}$

$-tg\alpha = \frac{y_0}{|AB| - x_0}$

$-(-\frac{C}{x_0^2}) = \frac{y_0}{|AB| - x_0}$

$\frac{C}{x_0^2} \cdot (|AB| - x_0) = y_0$

$\Downarrow y_0 = \frac{C}{x_0}$

$\frac{C}{x_0^2} \cdot (|AB| - x_0) = \frac{C}{x_0} \quad / : \frac{C}{x_0^2}$

$|AB| - x_0 = \frac{C}{x_0} \cdot \frac{x_0^2}{C}$

$|AB| = x_0 + x_0$

$|AB| = 2x_0$

Zatem

$P_{\Delta ABD} = \frac{C}{2x_0^2} \cdot (2x_0)^2 = \frac{C}{2x_0^2} \cdot 4x_0^2 = 2C$

Ponieważ obie krzywe funkcji danej w zadaniu są symetryczne względem początku układu współrzędnych, więc styczna do dolnej krzywej również wyznacza trójkąt o polu równym $2C$ ($C > 0$).

Dla przypadku 2 ponadto zachodzi:

$tg\alpha = \frac{y_0}{|AD|-|x_0|}$

$-\frac{C}{x_0^2} = \frac{y_0}{|AD|-|x_0|}$

$-\frac{C}{x_0^2} \cdot (|AD| - |x_0|) = y_0$

$\Downarrow y_0 = \frac{C}{x_0}$

$-\frac{C}{x_0^2} \cdot (|AD| - |x_0|) = \frac{C}{x_0} \quad / \cdot (-\frac{x_0^2}{C})$

$|AD| - |x_0| = \frac{C}{x_0} \cdot (-\frac{x_0^2}{C})$

$|AD| = -x_0 + |x_0|$

$|AD| = |x_0| + |x_0|$

$|AD| = 2 \cdot |x_0|$

Zatem

$P_{\Delta ABD} = -\frac{C}{2x_0^2} \cdot (2 \cdot |x_0|)^2 = -\frac{C}{2x_0^2} \cdot 4 \cdot |x_0|^2 = -2C$

Ponieważ obie krzywe funkcji danej w zadaniu są symetryczne względem początku układu współrzędnych, więc styczna do dolnej krzywej również wyznacza trójkąt o polu równym -2C ($C < 0$).

Ostatecznie biorąc pod uwagę oba przypadki pole trójkąta danego w zadaniu jest stałe i wynosi: $P_\Delta = 2C$ dla $C > 0$ oraz $P_\Delta = -2C$ dla $C < 0$, czyli ogólnie $P_\Delta = |2C|$ dla obu przypadków.