6.210.

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \;/\hat{}\,\frac{3}{2}$

$(y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \qquad (1)$

Obliczmy pochodną funkcji $y = f(x)$:

$y' = [(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}]' = \frac{3}{2} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}-1} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})' = \frac{3}{2} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot (0 - \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1}) =$

$= \frac{3}{2} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot (-\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}) = -x^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

Styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w dowolnym punkcie $A = (p, q)$ ma równanie:

$u = bv + c$ (gdzie u - jest zmienną zależną, v - zmienną niezależną a b, c są stałymi)

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie, zatem:

$tg\alpha = b = -p^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$

W punkcie B przecięcia stycznej z osią y mamy:

$u = b \cdot 0 + c$

$u = c$

$\Downarrow$

$B = (0, c)$

W punkcie C przecięcia stycznej z osią x mamy:

$0 = b \cdot v + c$

$v = -\frac{c}{b}$

$\Downarrow$

$C = (-\frac{c}{b}, 0)$

Długość odcinka pomiędzy tymi dwoma punktami wynosi:

$|BC| = \sqrt{(-\frac{c}{b} - 0)^2 + (0 - c)^2} = \sqrt{(-\frac{c}{b})^2 + (-c)^2} = \sqrt{(\frac{c}{b})^2 + c^2} = \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2 \cdot c^2}{b^2}} = \frac{|c|}{|b|} \cdot \sqrt{1 + b^2} \qquad (3)$

W punkcie $A = (p, q)$ na stycznej mamy:

$q = b \cdot p + c$

$c = q - bp \qquad (4)$

Podstawiając teraz (2) i (4) do (3) mamy:

$$|BC| = \frac{|q-bp|}{|-p^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}|} \cdot \sqrt{1 + [-p^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}]^2} = \frac{|q - p \cdot [-p^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}]|}{|p^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}|} \cdot \sqrt{1 + p^{-\frac{2}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})} \qquad (5)$$

Ale punkt $A = (p, q)$ leży także na krzywej (1), więc spełnia także jej równanie:

$q = (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

Podstawmy to do (5):

$$(5) = \frac{|(a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} + p^{\frac{2}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}|}{|p^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}|} \cdot \sqrt{1 + p^{-\frac{2}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})} = \frac{|(a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{2}} + p^{\frac{2}{3}}|}{|p^{-\frac{1}{3}}|} \cdot \sqrt{1 + p^{-\frac{2}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})} =$$

$$= \frac{|a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}} + p^{\frac{2}{3}}|}{|p^{-\frac{1}{3}}|} \cdot \sqrt{1 + p^{-\frac{2}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})} = \frac{|a^{\frac{2}{3}}|}{|p^{-\frac{1}{3}}|} \cdot \sqrt{1 + p^{-\frac{2}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})} = |p^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}| \cdot \sqrt{1 + p^{-\frac{2}{3}} \cdot (a^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})} =$$

$$= |p^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}| \cdot \sqrt{1 + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{2}{3}}} - \frac{p^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{2}{3}}}} = |p^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}| \cdot \sqrt{1 - 1 + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{2}{3}}}} = |p^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}| \cdot \sqrt{(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}})^2} = |p^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}| \cdot |\frac{a^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}}| =$$

$= |a^{\frac{2}{3}}| \cdot |a^{\frac{1}{3}}| = |a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}| = |a| = const$, co należało udowodnić

6.211.

$y = x^2 + px + q \qquad (1)$

Obliczamy pochodną powyższej funkcji:

$y' = (x^2 + px + q)' = 2x + p + 0 = 2x + p$

Oś odciętych ma równanie: $y = 0 \qquad (2)$

Styczna do wykresu funkcji ma równanie: $y = ax + b \qquad (3)$

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie, zatem biorąc pod uwagę $(2) \wedge (3)$, mamy:

$tg\alpha = a = 0 = 2u + p \qquad$ dla $A = (u, 0)$ - punktu styczności

$\Downarrow$

$p = -2u$

$u = -\frac{1}{2}p$

Ponieważ punkt A leży także na krzywej (1), więc spełnia także jej równanie:

$0 = u^2 + p \cdot u + q$

$0 = (-\frac{1}{2}p)^2 + p \cdot (-\frac{1}{2}p) + q$

$0 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p^2 + q \quad / \cdot 4$

$0 = p^2 - 2p^2 + 4q$

$0 = -p^2 + 4q$

$p^2 - 4q = 0$

Zatem współczynniki p i q w równaniu danym w zadaniu powinny spełniać następujący warunek: $p^2 - 4q = 0$

6.212.

$y = x^3 + px + q \qquad (1)$

Obliczmy najpierw pochodną powyższej funkcji:

$y' = (x^3 + px + q)' = 3x^2 + p + 0 = 3x^2 + p$

Oś Ox ma równanie $y = 0 \ \wedge \ x \geqslant 0 \qquad (2)$

Styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b \qquad (3)$

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie, zatem:

$tg\alpha = a \quad \wedge \quad (2) \wedge (3)$

$\Downarrow$

$a = 0 = 3u^2 + p \qquad$ dla $A = (u, 0) \ \wedge \ u \geqslant 0$

$\Downarrow$

$3u^2 = -p$

$u^2 = -\frac{1}{3}p \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3}p \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad p \leqslant 0$

$u = \sqrt{-\frac{1}{3}p}$

Ponierważ punkt A leży na krzywej (1), więc:

$0 = (\sqrt{-\frac{1}{3}p})^3 + p \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}p} + q$

$0 = (-\frac{1}{3}p)^{\frac{3}{2}} + p \cdot (-\frac{1}{3}p)^{\frac{1}{2}} + q$

$0 = (\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} \cdot (-p)^{\frac{3}{2}} + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (-p)^{\frac{3}{2}} + q$

$0 = (-p)^{\frac{3}{2}} \cdot [(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}] + q$

$-(-p)^{\frac{3}{2}} \cdot [(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}] = q \qquad /^2$

$(-p)^3 \cdot [(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}]^2 = q^2$

$(-p)^3 \cdot [(\frac{1}{3})^3 + 2 \cdot (\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} \cdot (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}] = q^2$

$(-p)^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [(\frac{1}{3})^2 + 2 \cdot (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} + 1] = q^2$

$-\frac{1}{3} \cdot p^3 \cdot (\frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 1) = q^2$

$-\frac{1}{3} \cdot p^3 \cdot (\frac{1}{9} + \frac{6}{9} + \frac{9}{9}) = q^2$

$-\frac{1}{3} \cdot p^3 \cdot \frac{16}{9} = q^2$

$-\frac{1}{27} \cdot p^3 \cdot 4^2 = q^2$

$-(\frac{1}{3}p)^3 \cdot 4^2 = q^2 \quad / : 4^2$

$-(\frac{1}{3}p)^3 = (\frac{1}{4}q)^2$

$(\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{4}q)^2 = 0$

Zatem współczynniki p i q w równaniu danym w zadaniu powinny spełniać następujący związek: $(\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{4}q)^2 = 0$

6.213.

$y = lnx \qquad\qquad x > 0 \quad S =?$

Aby styczna do wykresu funkcji $y = lnx$ była równoległa do prostej $y = 2x$, musi mieć ona postać: $y = 2x + b$.

Pochodna funkcji danej w zadaniu wynosi:

$y' = (lnx)' = \frac{1}{x}$

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie, zatem:

$S = (p, q), \quad tg\alpha = 2 = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$

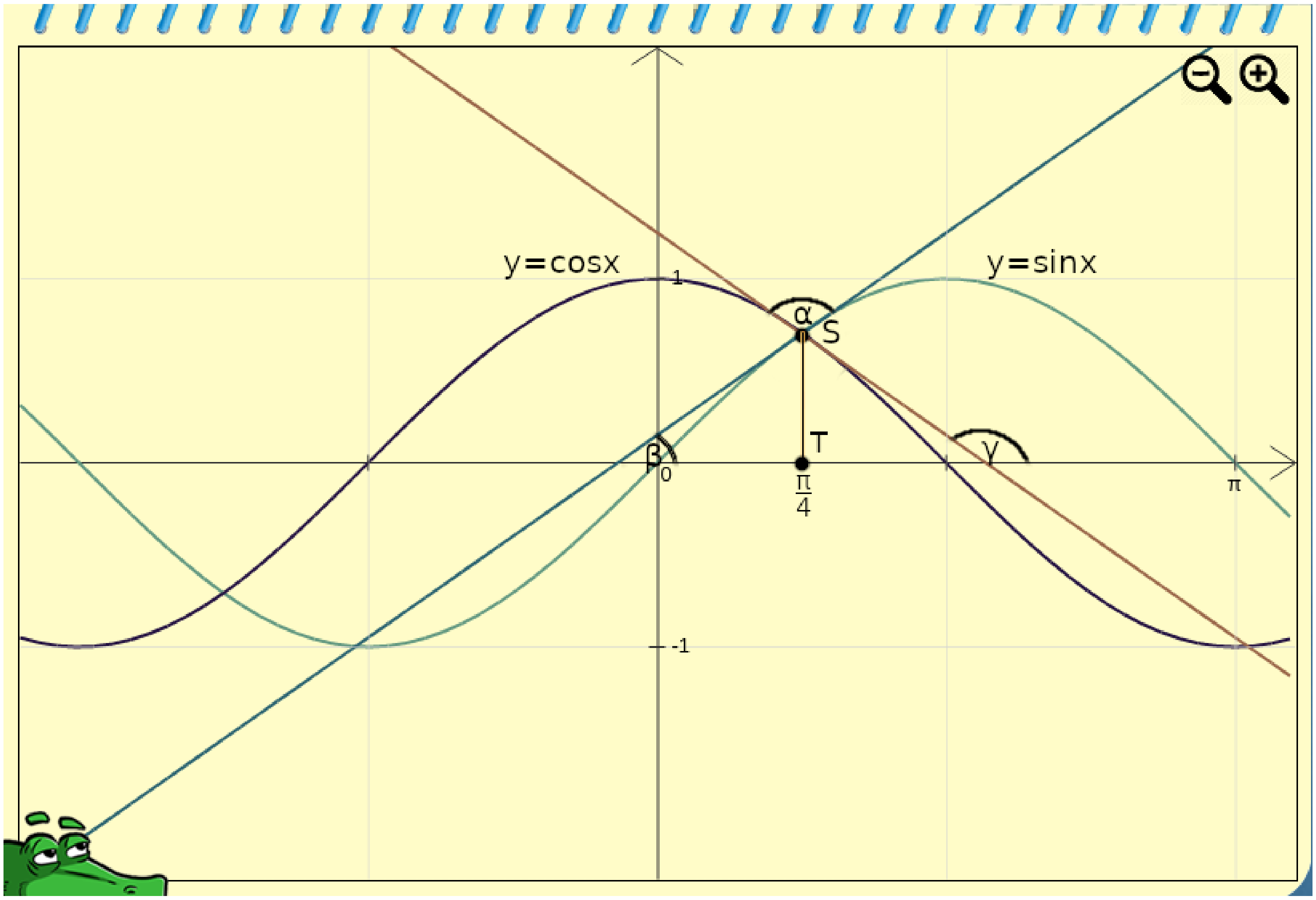
Ponieważ punkt S leży także na wykresie funkcji $y = lnx$, więc:

$q = lnp \quad \Leftrightarrow \quad q = ln\frac{1}{2} = ln2^{-1} = -ln2$

Warunek zadania jest więc spełniony w punkcie $S = (\frac{1}{2}, -ln2)$.

6.214.

$y = sinx, \quad y = cosx, \quad \alpha = ?$



Funkcje $sinx$ i $cosx$ przecinają się w punktach:

$x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{4}, \, k \in C$

Ponieważ funkcje te są okresowe i jedna z nich jest przesunięciem w poziomie drugiej, więc wystarczy, że znajdziemy kąt przeciecia w punkcie $x = \frac{\pi}{4}$. Ich wartość w tym punkcie wynosi $y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; S = (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Pochodne obu funkcji wynoszą:

$y' = (sinx)' = cosx$

$f'(\frac{\pi}{4}) = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y' = (cosx)' = -sinx$

$f'(\frac{\pi}{4}) = -sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ponieważ pochodna funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie, zatem:

$tg\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$

$tg\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$

$tg(\pi - \gamma) = -tg\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \beta = \pi - \gamma \Rightarrow \measuredangle(TSO) = \frac{1}{2}\alpha$

$tg(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{|OT|}{|ST|}$

$tg(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{\pi}{4} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^{-1} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2}$

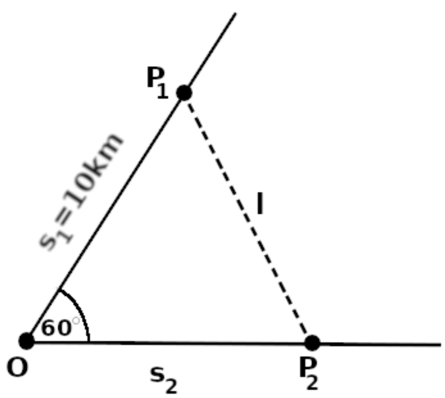
Skorzystajmy teraz z wzoru:

$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$

$tg\alpha = tg(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha) = \frac{tg(\frac{1}{2}\alpha) + tg(\frac{1}{2}\alpha)}{1 - tg(\frac{1}{2}\alpha) \cdot tg(\frac{1}{2}\alpha)} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2}}{1 - (\frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2})^2} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2}}{1 - \frac{2\pi^2}{16}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2 - \frac{2\pi^2}{8}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2 - \frac{\pi^2}{4}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}\pi}{8 - \pi^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{4\pi}{8 - \pi^2}$

Zatem funkcje $y = sinx$ i $y = cosx$ przecinają się pod kątem, dla którego $tg\alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{4\pi}{8 - \pi^2}$.

6.215.



$v_{P_1P_2} = \frac{dl}{dt} = ?$

Ponieważ ciało pierwsze porusza się ruchem jednostajnym z prdkością $v_{P_1} = 5km/h$,

więc odległość $10km$ pokona w czasie $t = 2h$.

Z wzoru kosinusów w trójkącie ΔOP_1P_2 mamy:

$l^2 = |OP_1|^2 + |OP_2|^2 - 2 \cdot |OP_1| \cdot |OP_2| \cdot cos60^\circ$

$l^2 = (5t)^2 + (2t^2 + t)^2 - 2 \cdot (5t) \cdot (2t^2 + t) \cdot \frac{1}{2}$

$l^2 = 25t^2 + 4t^4 + 4t^2 \cdot t + t^2 - 5t \cdot (2t^2 + t)$

$l^2 = 25t^2 + 4t^4 + 4t^3 + t^2 - 10t^3 - 5t^2$

$l^2 = 4t^4 - 6t^3 + 21t^2$

$l = \sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}$

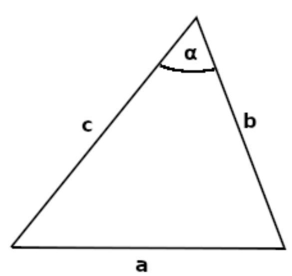
$v_{P_1P_2} = \frac{dl}{dt} = (\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4t^4-6t^3+21t^2}} \cdot (4t^4 - 6t^3 + 21t^2)' =$
$= \frac{16t^3-18t^2+42t^2}{2\cdot\sqrt{4t^4-6t^3+21t^2}}$

$v_{P_1P_2}(2) = \frac{16\cdot2^3-18\cdot2^2+42\cdot2}{2\cdot\sqrt{4\cdot2^4-6\cdot2^3+21\cdot2^2}} = \frac{16\cdot8-18\cdot4+84}{2\cdot\sqrt{4\cdot16-6\cdot8+21\cdot4}} = \frac{8\cdot8-9\cdot4+42}{\sqrt{64-48+84}} = \frac{64-36+42}{\sqrt{100}} = \frac{70}{10} = 7$

Zatem w chwili danej w zadaniu ciała będą się oddalały od siebie z prędkością $7km/h$.

6.216.

$\frac{dc}{dt} = 4, \quad \frac{db}{dt} = 6, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{-\sqrt{3}}{10}$ (znak '-', bo kąt w miarę upływu czasu maleje)



$c = x + 4t = f(t),$ gdzie x - długość boku c w chwili $t = 0$

$b = y + 6t = g(t),$ gdzie y - długość boku b w chwili $t = 0$

$\alpha = \varphi + \frac{-\sqrt{3}}{10}t = h(t),$ gdzie φ - kąt między bokami b i c w chwili $t = 0$

Mamy:

$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot sin\alpha$

$P_\Delta(t) = \frac{1}{2} \cdot f(t) \cdot g(t) \cdot sin(h(t))$

$\frac{dP_\Delta}{dt} = P'_\Delta(t) = [\frac{1}{2} \cdot f(t) \cdot g(t) \cdot sin(h(t))]' = \frac{1}{2} \cdot [f'(t) \cdot (g(t) \cdot sin(h(t))) + f(t) \cdot (g(t) \cdot sin(h(t)))'] =$

$= \frac{1}{2} \cdot [4 \cdot g(t) \cdot sin(h(t)) + f(t) \cdot (g'(t) \cdot sin(h(t)) + g(t) \cdot (sin(h(t)))')] =$

$= \frac{1}{2} \cdot [4 \cdot g(t) \cdot sin(h(t)) + f(t) \cdot (6 \cdot sin(h(t)) + g(t) \cdot cos(h(t)) \cdot h'(t))] =$

$= \frac{1}{2} \cdot [4 \cdot g(t) \cdot sin(h(t)) + f(t) \cdot (6 \cdot sin(h(t)) + g(t) \cdot cos(h(t)) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{10}))]$

Uwzględniając warunki zadania, w chwili $t = t_0$ mamy:

$f(t_0) = 20, \quad g(t_0) = 50, \quad h(t_0) = 30^\circ$

$v = P'_\Delta(t_0) = \frac{1}{2} \cdot [4 \cdot g(t_0) \cdot sin(h(t_0)) + f(t_0) \cdot (6 \cdot sin(h(t_0)) + g(t_0) \cdot cos(h(t_0)) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{10}))] =$

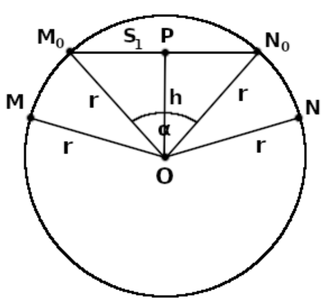
$= \frac{1}{2} \cdot [4 \cdot 50 \cdot sin30^\circ + 20 \cdot (6 \cdot sin30^\circ + 50 \cdot cos30^\circ \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{10}))] =$

$= \frac{1}{2} \cdot [200 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot \frac{1}{2} + 1000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{10})] = \frac{1}{2} \cdot (100 + 60 - \frac{1000 \cdot \sqrt{3}^2}{20}) = \frac{1}{2} \cdot (160 - 50 \cdot 3) =$

$= \frac{1}{2} \cdot (160 - 150) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

Zatem prędkość zmiany pola trójkąta danego w zadaniu wynosi $5cm/s$.

6.217.



$v = 2 \quad \wedge \quad h(t) = v \cdot t$

$\Downarrow$

$h = 2t$

Zastosujmy twierdzenie Pitagorasa do ΔOPM_0:

$h^2 + (\frac{1}{2} \cdot |M_0N_0|)^2 = r^2$

$4t^2 + \frac{1}{4} \cdot |M_0N_0|^2 = r^2 \quad / \cdot 4$

$16t^2 + |M_0N_0|^2 = 4r^2$

$|M_0N_0|^2 = 4r^2 - 16t^2$

$|M_0N_0| = \sqrt{4(r^2 - 4t^2)}$

$|M_0N_0| = 2 \cdot \sqrt{r^2 - 4t^2}$

Zastosujmy terqaz dwa wzory na pole trójkąta ΔOM_0N_0:

$\frac{1}{2} \cdot |M_0N_0| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot sin\alpha$

$|M_0N_0| \cdot 2t = r^2 \cdot sin\alpha$

$2 \cdot \sqrt{r^2 - 4t^2} \cdot 2t = r^2 \cdot sin\alpha$

$sin\alpha = \frac{4t \cdot \sqrt{r^2-4t^2}}{r^2}$

$\alpha = arcsin(\frac{4t \cdot \sqrt{r^2-4t^2}}{r^2})$

Pole odcinka koła S_1 wynosi:

$S_1 = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - sin\alpha)$

$S_1 = \frac{r^2}{2} \cdot (arcsin(\frac{4t \cdot \sqrt{r^2-4t^2}}{r^2}) - \frac{4t \cdot \sqrt{r^2-4t^2}}{r^2})$

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot arcsin(\frac{4t \cdot \sqrt{r^2-4t^2}}{r^2}) - 2t \cdot \sqrt{r^2 - 4t^2}$

Obliczmy pochodną korzystając z wzoru $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16t^2 \cdot (r^2-4t^2)}{r^4}}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (4t \cdot \sqrt{r^2 - 4t^2})' - (2t' \cdot \sqrt{r^2 - 4t^2} + 2t \cdot (\sqrt{r^2 - 4t^2})') =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(4t)' \cdot \sqrt{r^2-4t^2} + 4t \cdot (\sqrt{r^2-4t^2})'}{\sqrt{\frac{r^4 - 16t^2 \cdot (r^2-4t^2)}{r^4}}} - (2 \cdot \sqrt{r^2 - 4t^2} + 2t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2-4t^2}} \cdot (r^2 - 4t^2)') =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{r^2-4t^2} + 4t \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2-4t^2}} \cdot (r^2-4t^2)')}{\frac{\sqrt{r^4-16t^2 \cdot (r^2-4t^2)}}{r^2}} - (2 \cdot \sqrt{r^2 - 4t^2} + \frac{t}{\sqrt{r^2-4t^2}} \cdot (0 - 4 \cdot 2t)) =$$

$$= \frac{2r^2 \cdot \sqrt{r^2-4t^2} + t \cdot \frac{r^2}{\sqrt{r^2-4t^2}} \cdot (0 - 4 \cdot 2t)}{\sqrt{r^4 - 16t^2 \cdot (r^2-4t^2)}} - (2 \cdot \sqrt{r^2 - 4t^2} + \frac{t}{\sqrt{r^2-4t^2}} \cdot (-8t)) =$$

$$= \frac{2r^2 \cdot (\sqrt{r^2-4t^2})^2 + t \cdot r^2 \cdot (-8t)}{\sqrt{r^2-4t^2} \cdot \sqrt{r^4 - 16t^2 \cdot (r^2-4t^2)}} - \frac{2 \cdot (\sqrt{r^2-4t^2})^2 - 8t^2}{\sqrt{r^2-4t^2}} = \frac{2r^2 \cdot (r^2-4t^2) - 8 \cdot r^2 \cdot t^2}{\sqrt{r^2-4t^2} \cdot \sqrt{r^4 - 16 \cdot r^2 \cdot t^2 + 64t^4}} - \frac{2 \cdot (r^2-4t^2) - 8t^2}{\sqrt{r^2-4t^2}} =$$

$$= \frac{2r^4 - 8 \cdot r^2 \cdot t^2 - 8 \cdot r^2 \cdot t^2}{\sqrt{r^2-4t^2} \cdot \sqrt{(r^2-8t^2)^2}} - \frac{2 \cdot r^2 - 8t^2 - 8t^2}{\sqrt{r^2-4t^2}} = \frac{2r^4 - 16 \cdot r^2 \cdot t^2}{\sqrt{r^2-4t^2} \cdot (r^2-8t^2)} - \frac{2 \cdot r^2 - 16t^2}{\sqrt{r^2-4t^2}} =$$

$$\frac{2r^2(r^2 - 8 \cdot t^2)}{\sqrt{r^2-4t^2} \cdot (r^2-8t^2)} - \frac{2 \cdot r^2 - 16t^2}{\sqrt{r^2-4t^2}} = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2-4t^2}} - \frac{2 \cdot r^2 - 16t^2}{\sqrt{r^2-4t^2}} = \frac{16t^2}{\sqrt{r^2-4t^2}}$$

Znajdźmy czas, w którym cięciwa przebya drogę $\frac{1}{2}r$:

$\frac{1}{2}r = 2t \;\; \Rightarrow \;\; t = \frac{1}{4}r$

Zatem:

$$S_1'(\tfrac{1}{4}r) = \frac{16\cdot(\frac{1}{4}r)^2}{\sqrt{r^2-4\cdot(\frac{1}{4}r)^2}} = \frac{16\cdot\frac{1}{16}r^2}{\sqrt{r^2-4\cdot\frac{1}{16}r^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}r^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{\frac{3}{4}r^2}} = \frac{r^2}{\frac{\sqrt{3}\cdot r}{2}} = \frac{2r^2}{\sqrt{3}\cdot r} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$$

W chwili, w której cięciwa MN przebędzie drogę $\frac{1}{2}r$, pole odcinka koła S_1 będzie się zwiększało z prędkością $\frac{2\sqrt{3}r}{3}$, natomiast pole pozostałego odcinka koła będzie malało z prędkością $-\frac{2\sqrt{3}r}{3}$.