6.251.

$y = cosx$

$y' = -sinx$

$y'' = -(sinx)' = -cosx$

$y''' = -(cosx)' = -(-sinx) = sinx$

$y^{(4)} = (sinx)' = cosx = y$

I od tej chwili pochodne zaczynają się powtarzać. Zachodzą nastepujące związki trygonometryczne:

$y' = -sinx = sin(\pi + x) = sin(\pi + 0 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$

$y'' = -cosx = sin(\frac{3}{2}\pi + x) = sin(\pi + 1 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$

$y''' = sinx = sin(\frac{4}{2}\pi + x) = sin(\pi + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$

$y^{(4)} = cosx = sin(\frac{\pi}{2} + x) = sin(\pi + \pi + \frac{\pi}{2} + x) = sin(\pi + \frac{3}{2}\pi + x) = sin(\pi + 3 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$

Biorąc pod uwagę powyższe zależności widzimy, że wzór ogólny na pochodną rzędu n funkcji

y wyraża się wzorem:

$y^{(n)} = sin(\pi + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2} + x) = sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2} + x) = sin(\frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{\pi}{2} + x) = cos(n \cdot \frac{\pi}{2} + x)$

6.252.

$y = x^n$

$y' = nx^{n-1}$

$y'' = n(x^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2}$

$y''' = n(n-1)(x^{n-2})' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

Zatem: $y^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}$

oraz: $y^{(n)} = \frac{n!}{(n-n)!} \cdot x^{n-n} = \frac{n!}{0!} \cdot x^0 = \frac{n!}{1} \cdot 1 = n!$

6.253.

$y = lnx$ dla $x > 0$

$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$y'' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = -x^{-2}$

$y''' = -(x^{-2})' = -(-2) \cdot x^{-3} = 2x^{-3}$

$y^{(4)} = 2 \cdot (x^{-3})' = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -2 \cdot 3x^{-4}$

$y^{(5)} = -2 \cdot 3 \cdot (x^{-4})' = -2 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5}$

Zatem: $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$

6.254.

$y = \sqrt{x} \qquad \text{dla } x \geqslant 0$

$y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$y'' = \frac{1}{2} \cdot (x^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$

$y''' = -\frac{1}{4} \cdot (x^{-\frac{3}{2}})' = -\frac{1}{4} \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot x^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$

$y^{(4)} = \frac{3}{8} \cdot (x^{-\frac{5}{2}})' = \frac{3}{8} \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot x^{-\frac{5}{2}-1} = -\frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}}$

Zatem:

$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)]}{2^n} \cdot x^{-\frac{1}{2}-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)]}{2^n} \cdot x^{\frac{1}{2}-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^n} =$

$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot x^n} \cdot x^{\frac{1}{2}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot x^n} \cdot \sqrt{x}, \qquad \text{dla } n \geqslant 2 \ \wedge \ x > 0$

6.255.

$y = \sqrt[3]{x} \qquad \text{dla } x \geqslant 0$

$y' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$y'' = \frac{1}{3}(x^{-\frac{2}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}}$

$y''' = -\frac{2}{9} \cdot (x^{-\frac{5}{3}})' = -\frac{2}{9} \cdot (-\frac{5}{3}) \cdot x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27} \cdot x^{-\frac{8}{3}}$

$y^{(4)} = \frac{10}{27} \cdot (x^{-\frac{8}{3}})' = \frac{10}{27} \cdot (-\frac{8}{3}) \cdot x^{-\frac{11}{3}} = -\frac{80}{81} \cdot x^{-\frac{11}{3}}$

Zatem:

$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot [(3(n-1)-1]}{3^n} \cdot x^{-\frac{2}{3}-(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-3-1)}{3^n} \cdot x^{\frac{1}{3}-n} =$

$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot x^n} \cdot \sqrt[3]{x} \qquad \text{dla } x > 0 \ \wedge \ n \geqslant 2$

6.256.

$y = \frac{1}{ax+b} \qquad \text{dla } ax + b \neq 0$

$y' = [(ax+b)^{-1}]' = (-1) \cdot (ax+b)^{-2} \cdot (ax+b)' = -(ax+b)^{-2} \cdot a = -a(ax+b)^{-2}$

$y'' = -a \cdot [(ax+b)^{-2}]' = -a \cdot (-2) \cdot (ax+b)^{-3} \cdot (ax+b)' = 2a^2 \cdot (ax+b)^{-3}$

$y''' = 2a^2 \cdot [(ax+b)^{-3}]' = 2a^2 \cdot (-3) \cdot (ax+b)^{-4} \cdot (ax+b)' = -6a^3 \cdot (ax+b)^{-4}$

$y^{(4)} = -6a^3 \cdot [(ax+b)^{-4}]' = -6a^3 \cdot (-4) \cdot (ax+b)^{-5} \cdot (ax+b)' = 24a^4 \cdot (ax+b)^{-5}$

Zatem:

$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot a^n \cdot (ax+b)^{-(n+1)} = (-1 \cdot a)^n \cdot n! \cdot (ax+b)^{-(n+1)} = (-a)^n \cdot \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$

6.257.

$y = ln|C_1e^x + C_2e^{-x}| \qquad , y'' = 1 - (y')^2$

$y' = \frac{1}{C_1e^x+C_2e^{-x}} \cdot (C_1e^x + C_2e^{-x})' = \frac{C_1e^x+C_2[(e^x)^{-1}]'}{C_1e^x+C_2e^{-x}} = \frac{C_1e^x+C_2\cdot(-1)\cdot(e^x)^{-2}\cdot(e^x)'}{C_1e^x+C_2e^{-x}} = \frac{C_1e^x-C_2\cdot(e^x)^{-2}\cdot e^x}{C_1e^x+C_2e^{-x}} =$

$= \frac{C_1e^x-C_2\cdot(e^x)^{-2+1}}{C_1e^x+C_2e^{-x}} = \frac{C_1e^x-C_2\cdot(e^x)^{-1}}{C_1e^x+C_2e^{-x}} = \frac{C_1e^x-C_2\cdot e^{-x}}{C_1e^x+C_2e^{-x}}$

$y'' = (\frac{C_1e^x-C_2\cdot e^{-x}}{C_1e^x+C_2e^{-x}})' = \frac{(C_1e^x-C_2e^{-x})'\cdot(C_1e^x+C_2e^{-x})-(C_1e^x-C_2e^{-x})\cdot(C_1e^x+C_2e^{-x})'}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} =$

$= \frac{[(C_1e^x)'-(C_2e^{-x})']\cdot(C_1e^x+C_2e^{-x})-(C_1e^x-C_2e^{-x})\cdot[(C_1e^x)'+(C_2e^{-x})']}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} =$

$= \frac{[C_1e^x-C_2\cdot[(e^x)^{-1}]']\cdot(C_1e^x+C_2e^{-x})-(C_1e^x-C_2e^{-x})\cdot[C_1e^x+C_2\cdot[(e^x)^{-1}]']}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} =$

$= \frac{[C_1e^x-C_2\cdot(-1)\cdot(e^x)^{-2}\cdot(e^x)']\cdot(C_1e^x+C_2e^{-x})-(C_1e^x-C_2e^{-x})\cdot[C_1e^x+C_2\cdot(-1)\cdot(e^x)^{-2}\cdot(e^x)']}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} =$

$= \frac{[C_1e^x+C_2\cdot(e^x)^{-2}\cdot e^x]\cdot(C_1e^x+C_2e^{-x})-(C_1e^x-C_2e^{-x})\cdot[C_1e^x-C_2\cdot(e^x)^{-2}\cdot e^x]}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} =$

$= \frac{[C_1e^x+C_2\cdot(e^x)^{-1}]\cdot(C_1e^x+C_2e^{-x})-(C_1e^x-C_2e^{-x})\cdot[C_1e^x-C_2\cdot(e^x)^{-1}]}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} =$

$= \frac{(C_1e^x+C_2\cdot e^{-x})\cdot(C_1e^x+C_2e^{-x})-(C_1e^x-C_2e^{-x})\cdot(C_1e^x-C_2\cdot e^{-x})}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} = \frac{(C_1e^x+C_2\cdot e^{-x})^2-(C_1e^x-C_2e^{-x})^2}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} =$

$= \frac{(C_1e^x+C_2\cdot e^{-x})^2}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} - \frac{(C_1e^x-C_2e^{-x})^2}{(C_1e^x+C_2e^{-x})^2} = 1 - (\frac{C_1e^x-C_2e^{-x}}{C_1e^x+C_2e^{-x}})^2 = 1 - (y')^2$, c.n.d

6.258.

$y = C_1x^2 + 2C_1x + C_2 \qquad\qquad\qquad (1+x)y'' = y'$

$y' = C_1 \cdot 2x + 2C_1 = 2C_1x + 2C_1 = 2C_1(x+1)$

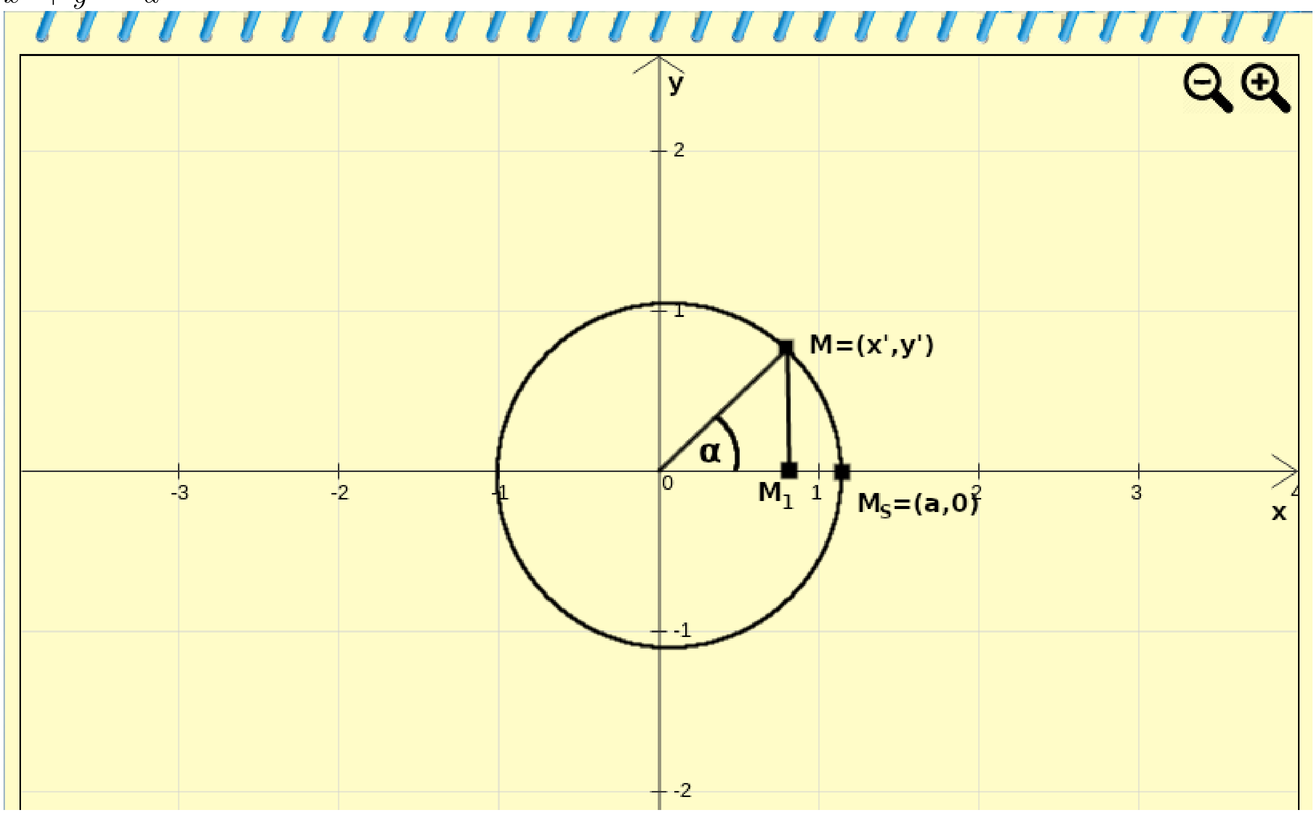
$y'' = 2C_1(x+1)' = 2C_1(1+0) = 2C_1$

Zatem:

$(1+x)y'' = (1+x) \cdot 2C_1 = 2C_1(x+1) = y'$ c.n.d.

6.259.

$x^2 + y^2 = a^2$



dla $t = 0$ mamy $M_1 = M_S = (a, 0)$

Ponieważ ruch po okręgu jest jednostajny oraz w chwili początkowej $t = 0 \ \wedge \ \alpha = 0$, więc:

$\alpha = \omega t \quad (1)$

Punkt $A = (x, y)$ obrócony o kąt α wokół początku układu współrzędnych daje punkt A'

o współrzędnych (x', y') które wyrażają się wzorami:

$$\begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha \end{cases}$$

W naszym przypadku $A = M_S = (a, 0)$ oraz $A' = M = (x', y')$, zatem:

$$\begin{cases} x' = acos\alpha - 0 \cdot sin\alpha \\ y' = asin\alpha + 0 \cdot cos\alpha \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x' = acos\alpha \\ y' = asin\alpha \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ (1)$$

$$\begin{cases} x' = acos(\omega t) \\ y' = asin(\omega t) \end{cases}$$

Dalej, punkt M_1 jest rzutem punktu M na oś Ox, więc ma on współrzędne:

$M_1 = (x', 0) = [acos(\omega t), 0]$, czyli w chwili t pokonuje on drogę $s = x' = acos(\omega t)$.

Jego prędkość wynosi:

$\frac{ds}{dt} = [acos(\omega t)]' = a \cdot [-sin(\omega t)] \cdot (\omega t)' = -a\omega \cdot sin(\omega t)$

Natomiast przyspieszenie:

$\frac{ds}{dt} = [-a\omega \cdot sin(\omega t)]' = -a\omega \cdot cos(\omega t) \cdot (\omega t)' = -a\omega^2 \cdot cos(\omega t)$

Prędkość początkowa (dla $t = 0$) wynosi: $-a\omega \cdot sin(\omega \cdot 0) = -a\omega \cdot sin0 = 0$

Przyspieszenie początkowe (dla $t = 0$) wynosi: $-a\omega^2 \cdot cos(\omega \cdot 0) = -a\omega^2 \cdot cos0 = 0 = -a\omega^2$

Punkt M_1 przechodzi przez początek układu współrzednych, gdy $x' = 0$ oraz

$\alpha = \omega t = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \{0, 1\}$

Zatem jego prędkość w tym punkcie wynosi:

$$-a\omega \cdot sin(k\pi + \tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} -a\omega \cdot sin(\frac{\pi}{2}) & dla\ k = 0 \\ -a\omega \cdot sin(\pi + \frac{\pi}{2}) & dla\ k = 1 \end{cases} = \begin{cases} -a\omega & dla\ k = 0 \\ -a\omega \cdot [-sin(\frac{\pi}{2})] & dla\ k = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -a\omega & dla\ k = 0\ (-\ bo\, porusza\, się\, w\, lewo) \\ a\omega & dla\ k = 1\ (+\ bo\, porusza\, się\, w\, prawo) \end{cases}$$

Natomiast przyspieszenie wynosi:

$$-a\omega^2 \cdot cos(k\pi + \tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} -a\omega^2 \cdot cos(\frac{\pi}{2}) & dla\ k = 0 \\ -a\omega^2 \cdot cos(\pi + \frac{\pi}{2}) & dla\ k = 1 \end{cases} = \begin{cases} -a\omega^2 \cdot 0 & dla\ k = 0 \\ -a\omega^2 \cdot [-cos(\frac{\pi}{2})] & dla\ k = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -a\omega^2 \cdot 0 & dla\ k = 0 \\ -a\omega^2 \cdot 0 & dla\ k = 1 \end{cases} = 0 \quad dla\, k \in \{0, 1\}$$

Punkt M_1 porusza się zgodnie z następującym prawem: $s = acos(\omega t)$.

Jego prędkość początkowa wynosi 0 a przyspieszenie początkowe wynosi $-a\omega^2$.

Jego prędkość w początku układu współrzędnych ma wartość $|-a\omega|$ a przyspieszenie w początku układu współrzędnych wynosi 0.

6.260.

$\varphi = a + bt - ct^2, \qquad\qquad a, b, c > 0 \quad \leftarrow$ stałe

Zachodzą następujące wzory:

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ i $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$

gdzie ω to prędkość kątowa a ε to przyspieszenie kątowe. Zatem:

$\omega = (a + bt - ct^2)' = 0 + b - 2ct = b - 2ct$

$\varepsilon = (b - 2ct)' = 0 - 2c$

Koło przestanie się obracać, gdy $\omega = 0$ czyli: $b - 2ct = 0 \Leftrightarrow 2ct = b \Leftrightarrow t = \frac{b}{2c}$.

6.261.

$x = asin(\omega t + \varphi_0) \qquad\qquad a, \omega, \varphi_0 = const$

$x' = [asin(\omega t + \varphi_0)]' = acos(\omega t + \varphi_0) \cdot (\omega t + \varphi_0)' = a\omega cos(\omega t + \varphi_0)$

$x'' = [a\omega cos(\omega t+\varphi_0)]' = a\omega \cdot [-sin(\omega t+\varphi_0)] \cdot (\omega t+\varphi_0)' = -a\omega \cdot sin(\omega t+\varphi_0) \cdot \omega = -a\omega^2 \cdot sin(\omega t+\varphi_0) =$

$= -\omega^2 \cdot [a \cdot sin(\omega t + \varphi_0)] = -\omega^2 \cdot x \quad$ c.n.d