6.75.

$y = \sqrt{x^2 - 4}, \qquad x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $y = u^{\frac{1}{2}}$, gdzie $u = x^2 - 4$

Zatem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2 \cdot x^{2-1} - 0) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$, dla $x < -2 \vee x > 2$

6.76.

$z = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \qquad ax^2 + bx + c \geqslant 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $z = u^{\frac{1}{2}}$, gdzie $u = ax^2 + bx + c$

Zatem: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2ax^{2-1} + b \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2ax + b) = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

dla $ax^2 + bx + c > 0$

6.77.

$y = \frac{1}{\sqrt{2-3t}}, \qquad 2 - 3t > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $y = u^{-\frac{1}{2}}$, gdzie $u = 2 - 3t$

Zatem: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (0 - 3 \cdot 1 \cdot t^{1-1}) = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} \cdot (-3) = \frac{3}{2\sqrt{u^3}} = \frac{3}{2\sqrt{(2-3t)^3}}$

dla $2 - 3t > 0 \Leftrightarrow 3t < 2 \Leftrightarrow t < \frac{3}{2}$

6.78.

$s = \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}, \qquad 6t - t^2 > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.4, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $s = u^{-\frac{1}{2}}$, gdzie $u = 6t - t^2$

Zatem: $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (6 \cdot 1 \cdot t^{1-1} - 2t^{2-1}) = -\frac{1}{2\sqrt{u^3}} \cdot (6-2t) = \frac{2t-6}{2\sqrt{(6t-t^2)^3}} = \frac{t-3}{(\sqrt{6t-t^2})^3}$

dla $6t - t^2 > 0 \Leftrightarrow t \cdot (6-t) > 0 \Leftrightarrow t \cdot (t-6) < 0 \Leftrightarrow (t < 0 \wedge t - 6 > 0) \vee (t > 0 \wedge t - 6 < 0)$

$\Updownarrow$

$(t < 0 \wedge t > 6) \vee (t > 0 \wedge t < 6)$

$\Updownarrow$

$t \in (0, 6)$

6.79.

$y = \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x^3)^4}}, \qquad (2-x^3)^4 > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $y = \frac{1}{(2-x^3)^{\frac{4}{3}}} = (2-x^3)^{-\frac{4}{3}} = u^{-\frac{4}{3}}$, gdzie $u = 2 - x^3$

Zatem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{4}{3} \cdot u^{-\frac{4}{3}-1} \cdot (0 - 3x^{3-1}) = -\frac{4}{3}u^{-\frac{7}{3}} \cdot (-3x^2) = 4u^{-\frac{7}{3}}x^2 = \frac{4x^2}{\sqrt[3]{u^7}} = \frac{4x^2}{\sqrt[3]{(2-x^3)^7}}$

dla $2 - x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 < 2 \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{2}$

6.80.

$y = \frac{1}{\sqrt[n]{(a+bx)^p}}, \qquad a + bx > 0,\ n \geqslant 2$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $y = \frac{1}{(a+bx)^{\frac{p}{n}}} = (a+bx)^{-\frac{p}{n}} = u^{-\frac{p}{n}}$, gdzie $u = a + bx$

Zatem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{p}{n} \cdot u^{-\frac{p}{n}-1} \cdot (0 + bx^{1-1}) = -\frac{p}{n}u^{\frac{-p-n}{n}} \cdot b = -\frac{p}{n} \cdot \frac{b}{\sqrt[n]{u^{p+n}}} = -\frac{p}{n} \cdot \frac{b}{\sqrt[n]{(a+bx)^{p+n}}}$

6.81.

$y = \frac{1}{(b-x^p)^n}, \qquad (b-x^p)^n \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $y = (b-x^p)^{-n} = u^{-n}$, gdzie $u = b - x^p$

Zatem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -nu^{-n-1} \cdot (0 - px^{p-1}) = \frac{-n}{u^{n+1}} \cdot (-px^{p-1}) = \frac{npx^{p-1}}{(b-x^p)^{n+1}}$

6.82.

$y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}, \qquad x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $y = \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{4}}} = (x-1)^{-\frac{3}{4}} = u^{-\frac{3}{4}}$, gdzie $u = x - 1$

Zatem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{3}{4} \cdot u^{-\frac{3}{4}-1} \cdot (1 \cdot x^{1-1} - 0) = -\frac{3}{4} \cdot u^{-\frac{7}{4}} \cdot 1 = \frac{-3}{4u^{\frac{7}{4}}} = -\frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^7}}$

6.83.

$u = \frac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}, \qquad v - \sqrt{a^2+v^2} \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $u = \frac{s}{t}$, gdzie $s = 1$, $t = v - \sqrt{a^2+v^2}$

$s' = 0$

$t' = 1 \cdot v^{1-1} - (\sqrt{w})'$, gdzie $w = a^2 + v^2 \quad (1)$

$w' = 0 + 2 \cdot v^{2-1} = 2v$

$f = \sqrt{a^2+v^2} = \sqrt{w}$

$\frac{df}{dv} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dv} = \frac{1}{2} w^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2v = \frac{v}{w^{\frac{1}{2}}} = \frac{v}{\sqrt{a^2+v^2}}$

$\Downarrow (1)$

$t' = 1 - \frac{v}{\sqrt{a^2+v^2}}$

Zatem ostatecznie: $u' = \frac{s't-st'}{t^2} = \frac{-1\cdot(1-\frac{v}{\sqrt{a^2+v^2}})}{(v-\sqrt{a^2+v^2})^2} = \frac{\frac{v}{\sqrt{a^2+v^2}}-1}{(v-\sqrt{a^2+v^2})^2} = \frac{\frac{v-\sqrt{a^2+v^2}}{\sqrt{a^2+v^2}}}{(v-\sqrt{a^2+v^2})^2} = \frac{v-\sqrt{a^2+v^2}}{\sqrt{a^2+v^2}\cdot(v-\sqrt{a^2+v^2})^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2+v^2}\cdot(v-\sqrt{a^2+v^2})}$

6.84.

$y = \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad a > 0,\ a^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $y = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)(a+x)}} = \frac{a-x}{(a-x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{a+x}} = \frac{(a-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \sqrt{u}$, gdzie $u = \frac{a-x}{a+x}$

Zatem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot (\frac{a-x}{a+x})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{(a-x)'\cdot(a+x)-(a-x)(a+x)'}{(a+x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}} \cdot \frac{-1\cdot(a+x)-(a-x)\cdot 1}{(a+x)^2} =$

$= \frac{\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} \cdot \frac{-a-x-a+x}{(a+x)^2} = \frac{(a+x)^{\frac{1}{2}}}{1\sqrt{a-x}} \cdot \frac{-2a}{(a+x)^2} = -\frac{a(a+x)^{\frac{1}{2}-2}}{\sqrt{a-x}} = -\frac{a(a+x)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}} = \frac{-a}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{(a+x)^3}} = \frac{-a}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{(a+x)^2(a+x))}} =$

$= \frac{-a}{(a+x)\cdot\sqrt{(a-x)(a+x)}}$

6.85.

$v = \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}, \qquad a^2 - z^2 > 0 \Leftrightarrow z^2 < a^2 \Leftrightarrow |z| < |a|$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.6 , 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $v = \frac{z}{\sqrt{u}}$, gdzie $u = a^2 - z^2$

$u' = 0 - 2 \cdot z^{2-1} = -2z$

$(\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}-1} \cdot u' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2z) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-2z) = \frac{-2z}{2\sqrt{a^2-z^2}} = -\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$

Zatem: $v' = \frac{z' \cdot \sqrt{u} - z \cdot (\sqrt{u})'}{(\sqrt{u})^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{a^2-z^2} - z \cdot (-\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}})}{a^2-z^2} = \frac{\frac{(\sqrt{a^2-z^2})^2}{\sqrt{a^2-z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{a^2-z^2}}}{a^2-z^2} = \frac{\frac{z^2+a^2-z^2}{\sqrt{a^2-z^2}}}{a^2-z^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-z^2} \cdot (a^2-z^2)} =$

$= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-z^2)(a^2-z^2)^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-z^2)^3}}$

6.86.

$y = \frac{3\sqrt{x}}{x^2+1}, \qquad x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4, 6.1.6 oraz 6.1.10.

$y' = \frac{(3\sqrt{x})' \cdot (x^2+1) - 3\sqrt{x} \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^{\frac{1}{2}})' \cdot (x^2+1) - 3\sqrt{x} \cdot (2x^{2-1}+0)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+1) - 3\sqrt{x} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 6x\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} =$

$= 3 \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x^3}}{(x^2+1)^2} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x^3}}{(x^2+1)^2} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x^4}}{2\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2} = 3 \cdot \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

6.87.

$y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}, \qquad x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $y = \frac{u}{v}$, gdzie $u = x^2$, $v = \sqrt[3]{x^3+1}$

$u' = 2x^{2-1} = 2x$

$v = \sqrt[3]{w}$, gdzie $w = x^3 + 1$

$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = (w^{\frac{1}{3}})' \cdot (3x^{3-1} + 0) = \frac{1}{3}w^{\frac{1}{3}-1} \cdot 3x^2 = \frac{1}{3w^{\frac{2}{3}}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$

Zatem: $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x \cdot \sqrt[3]{x^3+1} - x^2 \cdot \frac{x^2}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}}{(\sqrt[3]{x^3+1})^2} = \frac{2x(x^3+1)^{\frac{1}{3}} - \frac{x^4}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{2x(x^3+1)^{\frac{1}{3}}(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}} - \frac{x^4}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}} =$

$= \frac{2x(x^3+1)^{\frac{1}{3}}(x^3+1)^{\frac{2}{3}}-x^4}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}(x^3+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x(x^3+1)^1-x^4}{(x^3+1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2x^4+2x-x^4}{(\sqrt[3]{x^3+1})^4} = \frac{x^4+2x}{(\sqrt[3]{x^3+1})^4} = \frac{x(x^3+2)}{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}$

6.88.

$z = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$, $\quad \frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} \geqslant 0 \wedge x^2 - 7x + 12 \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $z = \sqrt{u}$, gdzie $u = \frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} = \frac{v}{w}$, $v = x^2 - 3x + 2$, $w = x^2 - 7x + 12$

Zatem $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (u^{\frac{1}{2}})' \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx}$ (1)

$u' = \frac{du}{dx} = \frac{v' \cdot w - vw'}{w^2} = (2)$

$v' = 2x^{2-1} - 3 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0 = 2x - 3$

$w' = 2x^{2-1} - 7 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0 = 2x - 7$

$(2) = \frac{(2x-3)(x^2-7x+12)-(x^2-3x+2)(2x-7)}{(x^2-7x+12)^2} = \frac{2x^3-14x^2+24x-3x^2+21x-36-(2x^3-7x^2-6x^2+21x+4x-14)}{(x^2-7x+12)^2} =$

$= \frac{2x^3-17x^2+45x-36-(2x^3-13x^2+25x-14)}{(x^2-7x+12)^2} = \frac{2x^3-17x^2+45x-36-2x^3+13x^2-25x+14}{(x^2-7x+12)^2} = \frac{-4x^2+20x-22}{(x^2-7x+12)^2} =$

$= \frac{-2(2x^2-10x+11)}{(x^2-7x+12)^2}$

Czyli

$(1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}} \cdot \frac{-2(2x^2-10x+11)}{(x^2-7x+12)^2} = \frac{-2x^2+10x-11}{\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} \cdot (x^2-7x+12)^2 \cdot (x^2-7x+12)}} =$

$\frac{-2x^2+10x-11}{\sqrt{(x^2-3x+2) \cdot (x^2-7x+12)^2 \cdot (x^2-7x+12)}} = (3)$

Rozłóżmy teraz mianownik na czynniki. W tym celu znajdźmy miejsca zerowe obu trójmianów kwadratowych.

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3-1}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3+1}{2} = 2$

$g(x) = x^2 - 7x + 12$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$

$x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{7-1}{2} = 3$

$x_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{7+1}{2} = 4$

Zatem ostatecznie szukana pochodna wynosi:

$z' = (3) = \frac{-2x^2+10x-11}{(x-3)(x-4)\cdot\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$

6.89.

$z = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$, $\qquad a^2 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \leqslant a^2 \Leftrightarrow |x| \leqslant |a|$ oraz $a \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $z = \sqrt{u}$, gdzie $u = \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (u^{\frac{1}{2}})' \cdot (\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{(a^2-x^2)'\cdot(a^2+x^2)-(a^2-x^2)\cdot(a^2+x^2)'}{(a^2+x^2)^2} =$

$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}} \cdot \frac{(0-2\cdot x^{2-1})(a^2+x^2)-(a^2-x^2)(0+2\cdot x^{2-1})}{(a^2+x^2)^2} = \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-2x(a^2+x^2)-2x(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2} =$

$= \frac{1}{2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-2a^2x-2x^3-2a^2x+2x^3}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-4a^2x}{2\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{(a^2+x^2)^3}} = \frac{-2a^2x}{\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+x^2)^2}} = \frac{-2a^2x}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2+x^2)}\cdot(\sqrt{a^2+x^2})^2} =$

$= \frac{-2a^2x}{(a^2+x^2)\cdot\sqrt{a^4-x^4}}$, dla $a \neq x$

6.90.

$s = \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}}$ $\qquad t \in [0;1]$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7 oraz 6.1.10.

Mamy $s = \sqrt{g}$, gdzie $g = \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$

Zatem $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dg} \cdot \frac{dg}{dt} = (g^{\frac{1}{2}})' \cdot (\frac{1-t^{\frac{1}{2}}}{1+t^{\frac{1}{2}}})' = (1)$

$(g^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot g^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2g^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{2\cdot\sqrt{1-\sqrt{t}}}$

$(\frac{1-t^{\frac{1}{2}}}{1+t^{\frac{1}{2}}})' = \frac{(1-t^{\frac{1}{2}})'(1+t^{\frac{1}{2}})-(1-t^{\frac{1}{2}})(1+t^{\frac{1}{2}})'}{(1+t^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{-\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}(1+t^{\frac{1}{2}})-\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}(1-t^{\frac{1}{2}})}{(1+t^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{-\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}}{(1+t^{\frac{1}{2}})^2} = -\frac{\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}}{(1+t^{\frac{1}{2}})^2} = -\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}\cdot(1+t^{\frac{1}{2}})^2} =$
$= -\frac{1}{\sqrt{t}\cdot(1+\sqrt{t})^2}$
$(1) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{2\cdot\sqrt{1-\sqrt{t}}}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{t}\cdot(1+\sqrt{t})^2}) = -\frac{(1+\sqrt{t})^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\sqrt{1-\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}\cdot(1+\sqrt{t})^2} = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-\sqrt{t}}\cdot\sqrt{(1+\sqrt{t})^3}} = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{t}\cdot\sqrt{(1-\sqrt{t})(1+\sqrt{t})(1+\sqrt{t})^2}} =$
$= \frac{-1}{2\cdot\sqrt{t}\cdot(1+\sqrt{t})\cdot\sqrt{1-t}}, \qquad t \neq 1$

6.91.

$u = \frac{\sqrt{1+v}-\sqrt{1-v}}{\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v}}, \qquad 1+v \geqslant 0 \ \wedge \ 1-v \geqslant 0 \ \wedge \ \sqrt{1+v}+\sqrt{1-v} \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.10 oraz $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot x'$.

Mamy:

$(\sqrt{1+v})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+v}}\cdot(1+v)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+v}}$

$(\sqrt{1-v})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-v}}\cdot(1-v)' = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{1-v}}$

$(\sqrt{1+v}-\sqrt{1-v})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+v}} - (\frac{-1}{2\cdot\sqrt{1-v}}) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+v}} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-v}} = \frac{\sqrt{1-v}+\sqrt{1+v}}{2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}}$

$(\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+v}} - \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-v}} = \frac{\sqrt{1-v}-\sqrt{1+v}}{2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}}$

$(\sqrt{1+v}-\sqrt{1-v})'\cdot(\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v}) = \frac{(\sqrt{1-v}+\sqrt{1+v})^2}{2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}} = (1)$

$(\sqrt{1+v}-\sqrt{1-v})\cdot(\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v})' = -\frac{(\sqrt{1+v}-\sqrt{1-v})^2}{2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}} = (2)$

$(1)-(2) = \frac{\sqrt{1-v}^2+2\cdot\sqrt{1-v}\cdot\sqrt{1+v}+\sqrt{1+v}^2}{2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}} + \frac{\sqrt{1+v}^2-2\cdot\sqrt{1-v}\cdot\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v}^2}{2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}} = \frac{2(1-v)+2(1+v)}{2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}} = \frac{2}{\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}}$

$u' = \frac{(1)-(2)}{(\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v})^2} = \frac{2}{\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+v}^2+2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}+\sqrt{1-v}^2} =$
$= \frac{2}{\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}}\cdot\frac{1}{1+v+2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}+1-v} = \frac{2}{\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}}\cdot\frac{1}{2+2\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}} = \frac{1}{\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}+\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}\cdot\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}} = \frac{1}{\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}+(1+v)(1-v)} = \frac{1}{\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}+(1+v)(1-v)} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}+1-v^2} = \frac{1}{1+\sqrt{1-v^2}-v^2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{1-\sqrt{1-v^2}} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{(1^2-\sqrt{1-v^2}^2)-(v^2-v^2\cdot\sqrt{1-v^2})} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{1-(1-v^2)-v^2+v^2\cdot\sqrt{1-v^2}} =$
$= \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{1-1+v^2-v^2+v^2\cdot\sqrt{1-v^2}} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\cdot\sqrt{1-v^2}}$

6.92.

$y = uvw$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.4, 6.1.5, 6.1.7.

$y' = ((uv)w)' = (uv)' \cdot w + (uv) \cdot w' = (u'v + uv') \cdot w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'$

6.93.

$v = cos\frac{t}{a}, \quad a \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.12.

Mamy: $v = cosu$, gdzie $u = \frac{t}{a}$

Zatem $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -sinu \cdot (\frac{1}{a} \cdot 1 \cdot t^{1-1}) = -sin\frac{t}{a} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}sin\frac{t}{a}$

6.94.

$x = asin(bt)$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11.

Mamy: $x = asinu$, gdzie $u = bt$

Zatem $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} = a \cdot cosu \cdot (b \cdot 1 \cdot t^{1-1}) = acos(bt) \cdot b = abcos(bt)$

6.95.

$y = asin\frac{a}{x}, \quad x \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11.

Mamy: $y = asinu$, gdzie $u = \frac{a}{x}$

Zatem $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = a \cdot cosu \cdot (ax^{-1})' = acos\frac{a}{x} \cdot a \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = -a^2x^{-2}cos\frac{a}{x} = -(\frac{a}{x})^2cos\frac{a}{x}$

6.96.

$z = 2x + sin(2x)$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.4, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11 oraz

$cos(2x) = cos^2x - sin^2x$, $cos^2x + sin^2x = 1$.

Mamy: $z = u + sinu$, gdzie $u = 2x$

Zatem $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (u' + (sinu)') \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = (1 + cosu) \cdot 2 = 2 \cdot 1 + 2cos(2x) = 2(sin^2x + cos^2x) +$

$+2(cos^2x - sin^2x) = 2sin^2x + 2cos^2x + 2cos^2x - 2sin^2x = 4cos^2x$

6.97.

$s = sin^2(3t)$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11.

Mamy: $s = u^2$, gdzie $u = sin(3t)$

i dalej: $u = sinv$, gdzie $v = 3t$

Zatem $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = (2 \cdot u^{2-1}) \cdot cosv \cdot 3 \cdot 1 \cdot t^{1-1} = 2ucosv \cdot 3 = 6sin(3t) \cdot cos(3t) = 3(2sin(3t) \cdot cos(3t)) =$

$= 3(sin(3t + 3t) + sin(3t - 3t)) = 3(sin(6t) + sin0) = 3sin(6t)$