6.98.

$v = 4cos^5(\frac{1}{4}t)$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.12.

Mamy $v = 4u^5$, gdzie $u = cos(\frac{1}{4}t)$

i dalej: $u = cosw$, gdzie $w = \frac{1}{4}t$

Zatem: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = 4 \cdot 5 \cdot u^{5-1} \cdot (-sinw) \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot t^{1-1} = 20u^4 \cdot (-sinw) \cdot \frac{1}{4} = -5cos^4(\frac{1}{4}t) \cdot sin(\frac{1}{4}t)$

6.99.

$s = \frac{1}{cos^4 t}, \qquad cost \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.7, 6.1.10, 6.1.12.

Mamy $s = cos^{-4}t = u^{-4}$, gdzie $u = cost$

Zatem: $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -4 \cdot u^{-4-1} \cdot (-sint) = 4u^{-5} \cdot sint = 4cos^{-5}t \cdot sint = \frac{4sint}{cos^5 t}$

6.100.

$v = \frac{5}{sin^3 2t}, \qquad sin2t \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11.

Mamy $v = 5 \cdot sin^{-3}(2t) = 5u^{-3}$, gdzie $u = sin2t$

i dalej: $u = sinw$, gdzie $w = 2t$

Zatem: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = 5 \cdot (-3) \cdot u^{-3-1} \cdot cosw \cdot 2 \cdot 1 \cdot t^{1-1} = -15 \cdot u^{-4} \cdot cos2t \cdot 2 = -30 \cdot \frac{cos2t}{sin^4 2t}$

6.101.

$s = \frac{sint+cost}{2sin(2t)}, \qquad sin(2t) \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11, 6.1.12

oraz $sin(2x) = 2 \cdot sinx \cdot cosx$

Mamy $s = \frac{sint+cost}{2sin(2t)} = \frac{sint+cost}{2 \cdot 2 \cdot sint \cdot cost} = \frac{1}{4cost} + \frac{1}{4sint} = \frac{1}{4}cos^{-1}t + \frac{1}{4}sin^{-1}t$

Przyjmijmy teraz:

$u = (cost)^{-1} = v^{-1}$, gdzie $v = cost$

$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = -1 \cdot v^{-2} \cdot (-sint) = \frac{sint}{cos^2 t}$

oraz

$w = (sint)^{-1} = x^{-1}$, gdzie $x = sint$

$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -1 \cdot x^{-2} \cdot cost = \frac{-cost}{sin^2 t}$

Zatem:

$s' = \frac{1}{4} \cdot (cost)^{-1} + \frac{1}{4} \cdot (sint)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{sint}{cos^2 t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{cost}{sin^2 t} = \frac{sin^3 t - cos^3 t}{4sin^2 t \cdot cos^2 t} = \frac{sin^3 t - cos^3 t}{(2sint \cdot cost)^2} = \frac{sin^3 t - cos^3 t}{sin^2(2t)}$

6.102.

$z = \frac{sin\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{sin\alpha}, \qquad \alpha \neq 0,\ sin\alpha \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11 oraz

$(sin\alpha)^{-1} = \frac{-cos\alpha}{sin^2\alpha}$ (wzór wyprowadzony w poprzednim zadaniu: 6.101)

Mamy $z = sin\alpha \cdot \alpha^{-1} + \alpha \cdot (sin\alpha)^{-1}$

Zatem: $z' = (sin\alpha)' \cdot \alpha^{-1} + sin\alpha \cdot (\alpha^{-1})' + \alpha' \cdot (sin\alpha)^{-1} + \alpha \cdot [(sin\alpha)^{-1}]' = cos\alpha \cdot \alpha^{-1} + sin\alpha \cdot (-1) \cdot \alpha^{-2} +$

$+1 \cdot \alpha^{1-1} \cdot (sin\alpha)^{-1} + \alpha \cdot (-\frac{cos\alpha}{sin^2\alpha}) = \frac{cos\alpha}{\alpha} - \frac{sin\alpha}{\alpha^2} + \frac{1}{sin\alpha} - \frac{\alpha \cdot cos\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{\alpha \cdot cos\alpha - sin\alpha}{\alpha^2} + \frac{sin\alpha - \alpha \cdot cos\alpha}{sin^2\alpha} =$

$= \frac{1}{\alpha^2} \cdot (\alpha \cdot cos\alpha - sin\alpha) - \frac{1}{sin^2\alpha} \cdot (\alpha cos\alpha - sin\alpha) = (\alpha cos\alpha - sin\alpha) \cdot (\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{sin^2\alpha})$

6.103.

$y = \frac{x \cdot sinx}{1 + tgx}, \qquad 1 + tgx \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6, 6.1.10, 6.1.11, 6.1.13.

Mamy $(x \cdot sinx)' = x' \cdot sinx + x \cdot (sinx)' = sinx + x \cdot cosx$

$(1 + tgx)' = 0 + (1 + tg^2 x) = 1 + tg^2 x$

Zatem: $y' = \frac{(x \cdot sinx)' \cdot (1+tgx) - x \cdot sinx \cdot (1+tgx)'}{(1+tgx)^2} = \frac{(sinx + x \cdot cosx) \cdot (1+tgx) - x \cdot sinx \cdot (1+tg^2 x)}{(1+tgx)^2}$

6.104.

$y = \frac{x}{sinx + cosx}, \qquad sinx + cosx \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.4, 6.1.6, 6.1.10, 6.1.11, 6.1.12 oraz

$2sinx \cdot cosx = sin2x,\ sin^2 x + cos^2 x = 1.$

Mamy $x' = 1$ oraz $(sinx + cosx)' = cosx - sinx$

Zatem: $y' = \frac{x' \cdot (sinx+cosx) - x \cdot (sinx+cosx)'}{(sinx+cosx)^2} = \frac{1 \cdot (sinx+cosx) - x \cdot (cosx - sinx)}{(sinx+cosx)^2} = \frac{sinx + cosx + x(sinx - cosx)}{sin^2 x + 2 \cdot sinx \cdot cosx + cos^2 x} =$

$= \frac{sinx+cosx+x(sinx-cosx)}{1+sin2x}, \qquad sin2x \neq -1$

6.105.

$y = cosx - \frac{1}{3}cos^3x$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.4, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.12 oraz

$sin^2x + cos^2x = 1.$

Mamy $z = (cosx)^3$, $z' = [(cosx)^3]' = (u^3)'$, gdzie $u = cosx$

$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot u^{3-1} \cdot (cosx)' = 3u^2 \cdot (-sinx) = -3 \cdot sinx \cdot cos^2x$

Zatem: $y' = -sinx - \frac{1}{3} \cdot (-3 \cdot sinx \cdot cos^2x) = -sinx + sinx \cdot cos^2x = sinx \cdot (cos^2x - 1) =$

$= sinx \cdot (cos^2x - cos^2x - sin^2x) = sinx \cdot (-sin^2x) = -sin^3x$

6.106.

$y = \frac{1}{3}sin^3x - \frac{2}{5}sin^5x + \frac{1}{7}sin^7x$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.4, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11 oraz

$sin^2x + cos^2x = 1.$

Mamy $z = (sinx)^n$, $n \in N$

$z = u^n$, gdzie $u = sinx$

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n \cdot u^{n-1} \cdot cosx = n \cdot sin^{n-1}x \cdot cosx$

Zatem: $y' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot sin^2x \cdot cosx - \frac{2}{5} \cdot 5 \cdot sin^4x \cdot cosx + \frac{1}{7} \cdot 7 \cdot sin^6x \cdot cosx = cosx \cdot (sin^2x - 2sin^4x + sin^6x) =$

$= cosx \cdot sin^2x \cdot (1 - 2sin^2x + sin^4x) = sin^2x \cdot cosx \cdot (1 - sin^2x)^2 = sin^2x \cdot cosx \cdot (sin^2x + cos^2x - sin^2x)^2 =$

$= sin^2x \cdot cosx \cdot cos^4x = sin^2x \cdot cos^5x$

6.107.

$y = tg^4\sqrt{x}, \qquad x \geqslant 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.7, 6.1.10, 6.1.13.

Mamy $y = (tgx^{\frac{1}{2}})^4 = u^4$, gdzie $u = tgx^{\frac{1}{2}}$

i dalej $u = tgz$, gdzie $z = x^{\frac{1}{2}}$

Zatem $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 4u^{4-1} \cdot (1+tg^2z) \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 4u^3 \cdot (1+tg^2z) \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot tg^3x^{\frac{1}{2}} \cdot (1+tg^2x^{\frac{1}{2}}) \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$

$= 2tg^3\sqrt{x} \cdot (1 + tg^2\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2sin^3\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot cos^3\sqrt{x}} \cdot (\frac{cos^2\sqrt{x}}{cos^2\sqrt{x}} + \frac{sin^2\sqrt{x}}{cos^2\sqrt{x}}) = \frac{2sin^3\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot cos^3\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{cos^2\sqrt{x}} = \frac{2sin^3\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot cos^5\sqrt{x}}$,

dla $x > 0 \wedge cos\sqrt{x} \neq 0$

6.108.

$y = 3ctgx + ctg^3x, \qquad x \geqslant 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.4, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.14 oraz $sin^2x + cos^2x = 1$.

Mamy $z = (ctgx)^3 = u^3$, gdzie $u = ctgx$

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot u^{3-1} \cdot (-\frac{1}{sin^2x}) = -3u^2 \cdot \frac{1}{sin^2x} = -3 \cdot \frac{cos^2x}{sin^2x} \cdot \frac{1}{sin^2x} = -\frac{3cos^2x}{sin^4x}$

Zatem: $y' = 3 \cdot (-\frac{1}{sin^2x}) + (-\frac{3cos^2x}{sin^4x}) = -\frac{3}{sin^2x} \cdot (1 + \frac{cos^2x}{sin^2x}) = -\frac{3}{sin^2x} \cdot (\frac{sin^2x}{sin^2x} + \frac{cos^2x}{sin^2x}) = -\frac{3}{sin^2x} \cdot (\frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x}) =$

$= -\frac{3}{sin^2x} \cdot \frac{1}{sin^2x} = -\frac{3}{sin^4x}$, dla $sinx \neq 0$

6.109.

$y = e^{ax} \cdot (a \cdot sinx - cosx), \qquad x \geqslant 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.4, 6.1.5, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11, 6.1.12, 6.1.19.

Mamy: $v = e^{ax} = (e^x)^a = u^a$, gdzie $u = e^x$

$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = a \cdot u^{a-1} \cdot e^x = a(e^x)^{a-1} \cdot e^x = a \cdot e^{ax}$

$(a \cdot sinx - cosx)' = a \cdot cosx - (-sinx) = a \cdot cosx + sinx$

Zatem:

$y' = (e^{ax})' \cdot (a \cdot sinx - cosx) + e^{ax} \cdot (a \cdot sinx - cosx)' = a \cdot e^{ax} \cdot (a \cdot sinx - cosx) + e^{ax} \cdot (sinx + a \cdot cosx) =$

$= a^2 \cdot e^{ax} \cdot sinx - a \cdot e^{ax} \cdot cosx + e^{ax} \cdot sinx + a \cdot e^{ax} \cdot cosx = a^2 \cdot e^{ax} \cdot sinx + e^{ax} \cdot sinx = (a^2 + 1) \cdot e^{ax} \cdot sinx$

6.110.

$y = x^2e^{2x} \cdot sinx$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.5, 6.1.10, 6.1.11, 6.1.19 oraz z wzoru wyprowadzonego w zadaniu poprzednim: $(e^{ax})' = ae^{ax}$

$y = (x^2e^{2x}) \cdot sinx$

$y' = (x^2e^{2x})' \cdot sinx + (x^2e^{2x}) \cdot (sinx)' = [(x^2)' \cdot e^{2x} + x^2 \cdot (e^{2x})'] \cdot sinx + x^2e^{2x} \cdot cosx =$

$= (2x \cdot e^{2x} + 2x^2e^{2x}) \cdot sinx + x^2e^{2x}cosx = xe^{2x}(2sinx + 2xsinx + xcosx)$

6.111.

$y = cos^2\sqrt{\frac{1}{x}}$, dla $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.7, 6.1.10, 6.1.12 oraz $2sinx \cdot cosx = sin2x$.

$y = (cos\sqrt{\frac{1}{x}})^2 = u^2$, gdzie $u = cos\sqrt{\frac{1}{x}} = cosx^{-\frac{1}{2}}$

i dalej $u = cosv$, gdzie $v = x^{-\frac{1}{2}}$

Zatem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2 \cdot u^{2-1} \cdot (-sinv) \cdot (-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}) = 2u \cdot sinv \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = 2 \cdot cosx^{-\frac{1}{2}} \cdot sinx^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} =$
$= \frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot sin(2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot sin\frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{sin(2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}})}{2x\sqrt{x}}$

6.112.

$y = 2sin^3\sqrt{\frac{3}{x}}$, dla $x > 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11 oraz $2sinx \cdot cosx = sin2x$.

Mamy: $y = 2(sin\sqrt{\frac{3}{x}})^3 = 2u^3$, gdzie $u = sin\sqrt{\frac{3}{x}}$

i dalej: $u = sinv$, gdzie $v = \sqrt{\frac{3}{x}} = \sqrt{3} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

Zatem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2 \cdot 3 \cdot u^2 \cdot cosv \cdot \sqrt{3} \cdot (-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -3 \cdot sin^2\sqrt{\frac{3}{x}} \cdot cos\sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} =$
$= -3 \cdot \sqrt{\frac{3}{x^3}} \cdot sin^2\sqrt{\frac{3}{x}} \cdot cos\sqrt{\frac{3}{x}}$

6.113.

$y = \frac{sin^2x}{cos^7x} - \frac{2}{5cos^5x}$, dla $cosx \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11, 6.1.12.

W zadaniu 6.106 wyprowadziliśmy wzór:

$[(sinx)^n]' = n \cdot sin^{n-1}x \cdot cosx$

Podobnie:

$z = (cosx)^n$, $n \in N$

$z = u^n$, gdzie $u = cosx$

Zatem:

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \cdot (-sinx) = ncos^{n-1}x \cdot (-sinx) = -n \cdot cos^{n-1}x \cdot sinx$

$y' = \frac{(sin^2x)' \cdot cos^7x - sin^2x \cdot (cos^7x)'}{[(cosx)^7]^2} - \frac{2' \cdot 5cos^5x - 2 \cdot (5cos^5x)'}{[5(cosx)^5]^2} = \frac{2sinx \cdot cosx \cdot cos^7x - sin^2x \cdot (-7 \cdot cos^6x \cdot sinx)}{cos^{14}x} - \frac{0 - 2 \cdot 5 \cdot (-5 \cdot cos^4x \cdot sinx)}{25 \cdot cos^{10}x} =$

$= \frac{2sinx \cdot cos^8x + 7 \cdot sin^3x \cdot cos^6x}{cos^{14}x} - \frac{50 \cdot cos^4x \cdot sinx}{25 \cdot cos^{10}x} = \frac{2sinx \cdot cos^2x + 7 \cdot sin^3x}{cos^8x} - \frac{2 \cdot cos^2x \cdot sinx}{cos^8x} = \frac{sinx \cdot (2cos^2x + 7sin^2x - 2cos^2x)}{cos^8x} = \frac{7sin^3x}{cos^8x}$

6.114.

$y = \frac{3cos^2x}{sin^3x}$, dla $sinx \neq 0$

Pochodną obliczamy korzystając z wzorów 6.1.3, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.10, 6.1.11, 6.1.12 oraz

z następujących wzorów wyprowadzonych w zadaniach 6.106, 6.113:

$(sin^nx)' = n \cdot sin^{n-1}x \cdot cosx$

$(cos^nx)' = -n \cdot cos^{n-1}x \cdot sinx$,

a także z wzoru $sin^2x + cos^2x = 1$

$y' = \frac{(3cos^2x)' \cdot sin^3x - 3cos^2x \cdot (sin^3x)'}{(sin^2x)^2} = \frac{3 \cdot (-2cosx \cdot sinx) \cdot sin^3x - 3cos^2x \cdot (3 \cdot sin^2x \cdot cosx)}{sin^6x} = -\frac{6cosx \cdot sin^4x + 9cos^3x \cdot sin^2x}{sin^6x} =$

$-\frac{6cosx \cdot sin^2x + 9cos^3x}{sin^4x} = -\frac{6cosx \cdot sin^2x + 9cos^3x}{sin^4x} = -3cosx \cdot \frac{2sin^2x + 3cos^2x}{sin^4x} - 3cosx \cdot \frac{2(sin^2x + cos^2x) + cos^2x}{sin^4x} =$

$= -3cosx \cdot \frac{2 + cos^2x}{sin^4x}$