8.3.

$|z| < 4$

$z = a + bi$

Liczbę tą możemy przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$a + bi = r(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$,

gdzie $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ jest modułem, czyli:

$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\Downarrow$

$-4 < \sqrt{a^2 + b^2} < 4$

$0 \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} < 4 \quad /^2$

$0 \leqslant a^2 + b^2 < 4^2$

Zatem nierówność daną w zadaniu spełniają liczby zespolone, których części rzeczywiste oraz urojone tworzą na płaszczyźnie punkty należące do wnętrza okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 4.

8.4.

$|z| < 2$ i $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

Podobnie jak w zadaniu **8.3** nierówność $|z| < 2$ spełniają punkty należące do wnętrza okręgu o środku w początku układu współrzednych i promieniu **2**. Dodatkowo warunek $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ogranicza rozwiązanie do wnętrza powyższego okręgu znajdującego się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych bez punktów leżących na osiach rzeczywistej i urojonej.

8.5.

$|z - 3 + 4i| < 5$

$z = a + bi$, więc nierówność przybiera postać:

$|a + bi - 3 + 4i| < 5$

$|(a - 3) + i \cdot (b + 4)| < 5$

$|(a - 3) + i \cdot (b + 4)| = r = \sqrt{(a - 3)^2 + (b + 4)^2}$

$\sqrt{(a - 3)^2 + (b + 4)^2} < 5 \quad /^2$

$(a - 3)^2 + (b + 4)^2 < 5^2$

Powyższy warunek spełniają punkty należące do wnętrza okręgu o środku w punkcie $P = (3, -4)$ leżącym na płaszczyźnie liczb urojonych (czyli w punkcie $3 - 4i$) i promieniu 5.

8.6.

a). $|z| = 3$

Mamy $z = a + bi = r(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$ oraz $|a + bi| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$, zatem:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3 \quad /^2$
$a^2 + b^2 = 3^2$
Czyli równanie dane w zadaniu spełniają punkty leżące na okręgu o środku w początku układu\
współrzędnych liczb urojonych i promieniu 3.

b). $\varphi = \frac{\pi}{4}$
Mamy $z = a + bi = r(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$ oraz $|a + bi| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$, skąd:
$cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (1)$

$sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (2)$

$(1) \quad \wedge \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = b}$

Ostatni warunek a zarazem warunki tego zadania spełnione są dla półprostej wychodzącej z początku układu współrzędnych w pierwszej ćwiartce płaszczyzny urojonej oraz tworzącej z osią rzeczywistą kąt $\frac{\pi}{4}$.

8.7.
$-5 = -5 + i \cdot 0 = r \cdot (cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$
$r \cdot cos\varphi = -5 \;\; (1) \quad \wedge \qquad r \cdot sin\varphi = 0 \;\; (2)$
$(1) \quad \wedge \quad (2) \quad \Rightarrow \quad r \neq 0 \quad \wedge \quad sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi \;\vee\; \varphi = 2\pi \quad (3)$
Podnieśmy oba równania (1) i (2) stronami do kwadratu i dodajmy stronami:
$r^2 \cdot cos^2\varphi + r^2 \cdot sin^2\varphi = (-5)^2 + 0^2$
$r^2 \cdot (sin^2\varphi + cos^2\varphi) = 25$
$r^2 = 25$
$r = 5$ (bo $r > 0$)
Podstawmy $r = 5$ do (1):
$5 \cdot cos\varphi = -5$
$cos\varphi = -1$
$\Updownarrow$
$\varphi = \pi \quad (4)$
Warunki (3) i (4) są jednocześnie spełnione dla $\varphi = \pi$.
Zatem rozwiązaniem zadania jest: $-5 = 5 \cdot (cos\pi + i \cdot sin\pi)$

8.8.

$2i = 0 + 2i = r \cdot (cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$

$\Downarrow$

$r \cdot cos\varphi = 0 \ \ (1) \qquad \wedge \qquad r \cdot sin\varphi = 2 \ \ (2) \qquad r > 0 \ \ (3)$

$(1) \ \wedge \ (3) \ \Rightarrow \ cos\varphi = 0 \ \Rightarrow \ \varphi = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \varphi = \frac{3}{2}\pi$

Zatem musi zachodzić $r \cdot sin\frac{\pi}{2} = 2 \ \vee \ r \cdot sin\frac{3\pi}{2} = 2$

$r = \frac{2}{1} \qquad \vee \qquad r = \frac{2}{-1}$

$r = 2 \ \vee \ r = -2$

Po uwzględnieniu (3) zostaje $r = 2$. Ostatecznie liczba $2i$ ma następującą postać trygonometryczną: $2i = 2 \cdot (cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sin\frac{\pi}{2})$

8.9.

$1 + i = r \cdot (cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$

$r \cdot cos\varphi = 1 \ \ (1) \qquad \wedge \qquad r \cdot sin\varphi = 1 \ \ (2) \qquad r > 0 \ \ (3)$

ale $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, zatem:

$cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Powyższe dwie równości zachodzą dla $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Zatem liczba $1+i$ ma następującą postać trygonometryczną:

$1 + i = \sqrt{2} \cdot (cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sin\frac{\pi}{4})$

8.10.

$\sqrt{3} + i = r \cdot (cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\varphi = \frac{\pi}{6} \ \vee \ \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} \ \ (1) \qquad\qquad \varphi = \frac{\pi}{6} \ \vee \ \varphi = \pi - \frac{\pi}{6} \ \ (2)$

$(1) \ \wedge \ (2) \ \Leftrightarrow \ \varphi = \frac{\pi}{6}$

Zatem liczba $\sqrt{3} + i$ ma następującą postać trygonometryczną:

$\sqrt{3} + i = 2 \cdot (cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sin\frac{\pi}{6})$

8.11.

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1^2+2i+i^2}{1^2-i^2}=\frac{1+2i+(-1)}{1-(-1)}=\frac{2i}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$

8.12.

$\frac{2i}{1+i}=\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2i\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{2i-2i^2}{1^2-i^2}=\frac{2i-2\cdot(-1)}{1-(-1)}=\frac{2i+2}{1+1}=\frac{2(i+1)}{2}=i+1=1+i$

8.13.

$\frac{4-3i}{4+3i}=\frac{4-3i}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}=\frac{(4-3i)^2}{4^2-(3i)^2}=\frac{4^2-2\cdot4\cdot3i+(3i)^2}{16-9\cdot i^2}=\frac{16-24i+9\cdot i^2}{16-9\cdot(-1)}=\frac{16-24i+9\cdot(-1)}{16+9}=\frac{16-24i-9}{25}=\frac{7-24i}{25}=$

$=\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i=\frac{1}{25}\cdot(7-24i)$

8.14.

$\sqrt{-3-4i}$

Przedstawmy liczbę zespoloną $-3-4i$ w postaci trygonometrycznej:

$-3-4i=r\cdot(cos\varphi+i\cdot sin\varphi)$

$r^2=(-3)^2+(-4)^2$

$r^2=9+16$

$r^2=25$

$r=5$

$cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{-3}{5}$

$sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{-4}{5}$

Widzimy, że nie można bez tablic określić kąta φ. Dlatego przedstawmy liczbę daną w zadaniu nastepująco:

$\sqrt{-3-4i}=a+bi$

Bo jest to liczba zespolona. Następnie podnieśmy obie strony równania do kwadratu:

$-3-4i=(a+bi)^2$

$-3-4i=a^2+2abi+b^2i^2$

$-3-4i=a^2+2abi+b^2\cdot(-1)$

$-3-4i=(a^2-b^2)+2abi$

$\Downarrow$

$-3=a^2-b^2 \quad (1) \quad \wedge \quad -4=2ab \quad (2)$

$ab=-2$

$a=\frac{-2}{b}$

Podstawmy a do (1):

$-3=(\frac{-2}{b})^2-b^2$

$-3 = \frac{4}{b^2} - b^2$

$-3b^2 = 4 - b^4$

$b^4 - 3b^2 - 4 = 0$

Podstawmy $b^2 = p$:

$p^2 - 3p - 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

$p_1 = \frac{-(-3)-5}{2 \cdot 1}$	$p_2 = \frac{-(-3)+5}{2 \cdot 1}$
$p_1 = \frac{3-5}{2}$	$p_2 = \frac{3+5}{2}$
$p_1 = \frac{-2}{2}$	$p_2 = \frac{8}{2}$
$p_1 = -1$	$p_2 = 4$

Zatem $b^2 = -1 \quad \vee \quad b^2 = 4$, ale $b \in R$ więc rozwiązanie ujemne odpada.

$b^2 = 4$

$\Updownarrow$

$b_1 = -2 \quad \vee \quad b_2 = 2$

Teraz otrzymujemy a:

$a_1 = \frac{-2}{-2} = 1$

$a_2 = \frac{-2}{2} = -1$

Czyli liczba dana w zadaniu jest równa:

$\sqrt{-3-4i} = 1 - 2i \qquad \vee \qquad \sqrt{-3-4i} = -1 + 2i$

$\Updownarrow$

$\sqrt{-3-4i} = \pm(1 - 2i)$

8.15.

$\sqrt{8+6i}$

Przedstawmy powyższą liczbę nastepująco:

$\sqrt{8+6i} = a + bi \quad /^2$

$8 + 6i = (a + bi)^2$

$8 + 6i = a^2 + 2abi + b^2 i^2$

$8 + 6i = a^2 + 2abi + b^2 \cdot (-1)$

$8 + 6i = (a^2 - b^2) + 2abi$

$\Downarrow$

$8 = a^2 - b^2 \quad (1) \quad \wedge \quad 6 = 2ab \quad (2)$

$ab = 3$

$a = \frac{3}{b}$

Podstawmy a do (1):

$8 = (\frac{3}{b})^2 - b^2$

$8 = \frac{9}{b^2} - b^2 \quad / \cdot b^2$

$8b^2 = 9 - b^4$

$b^4 + 8b^2 - 9 = 0$

Podstawmy $b^2 = p$:

$p^2 + 8p - 9 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 64 + 36 = 100$

$\sqrt{\Delta} = 10$

$p_1 = \frac{-8-10}{2}$ $\qquad$ $p_2 = \frac{-8+10}{2}$

$p_1 = \frac{-18}{2}$ $\qquad$ $p_2 = \frac{2}{2}$

$p_1 = -9$ $\qquad$ $p_2 = 1$

Ponieważ $b \in R$ więc jej kwadrat musi być liczbą nieujemną. Bieżemy więc pod uwagę tylko wartość p_2:

$b^2 = p_2 = 1$

$\Updownarrow$

$b_1 = -1 \quad \vee \quad b_2 = 1$

Teraz otrzymujemy a:

$a_1 = \frac{3}{-1} = -3$

$a_2 = \frac{3}{1} = 3$

Ostatecznie liczba dana w zadaniu jest równa:

$\sqrt{8+6i} = -3 - i \qquad \vee \qquad \sqrt{8+6i} = 3 + i$

$\Updownarrow$

$\sqrt{8+6i} = \pm(3+i)$

8.16.

$(1+i)^{10}$

Przedstawmy liczbę $1+i$ w postaci trygonometrycznej:

$1 + i = r \cdot (cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Downarrow$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

Mamy więc:

$1 + i = \sqrt{2} \cdot (cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sin\frac{\pi}{4})$

$\Updownarrow$

$(1+i)^{10} = [\sqrt{2} \cdot (cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sin\frac{\pi}{4})]^{10}$

Zastosujmy wzór Moivre'a:
$(1+i)^{10} = \sqrt{2}^{10} \cdot [cos(10 \cdot \frac{\pi}{4}) + i \cdot sin(10 \cdot \frac{\pi}{4})] = (\sqrt{2}^2)^5 \cdot [cos(5 \cdot \frac{\pi}{2}) + i \cdot sin(5 \cdot \frac{\pi}{2})] = 2^5 \cdot [cos(\frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) + i \cdot sin(\frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2})] =$
$= 32 \cdot [cos(2\pi + \frac{\pi}{2}) + i \cdot sin(2\pi + \frac{\pi}{2})] = 32 \cdot (cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sin\frac{\pi}{2}) = 32 \cdot (0 + i \cdot 1) = 32i$

Liczba dana w zadaniu równa się 32i.

8.17.
$(2 + i \cdot \sqrt{12})^5$
Przedstawmy potęgowaną liczbę w postaci trygonometrycznej:
$2 + i \cdot \sqrt{12} = r \cdot (cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$
$r = \sqrt{2^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$
$cos\varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $sin\varphi = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Downarrow$
$\varphi = \frac{\pi}{3}$
Zatem:
$(2 + i \cdot \sqrt{12})^5 = [4 \cdot (cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi}{3})]^5 = (stosujemy\, wzór\, Moivre'a) = 4^5 \cdot (cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot sin\frac{5\pi}{3}) =$
$= 2^{10} \cdot [cos(\frac{5\pi}{3} - 2\pi) + i \cdot sin(\frac{5\pi}{3} - 2\pi)] = 2^{10} \cdot [cos(\frac{5\pi - 6\pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{5\pi - 6\pi}{3})] = 2^{10} \cdot [cos(-\frac{\pi}{3}) + i \cdot sin(-\frac{\pi}{3})] =$
$= 2^{10} \cdot [cos\frac{\pi}{3} + i \cdot (-sin\frac{\pi}{3})] = 2^{10} \cdot (cos\frac{\pi}{3} - i \cdot sin\frac{\pi}{3}) = 2^{10} \cdot (\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2^9 \cdot (1 - \sqrt{3} \cdot i) = 512 \cdot (1 - \sqrt{3} \cdot i)$

8.18.
$(1 + cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi}{3})^6$
$(1 + cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi}{3})^6 = (1 + \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})^6 = (\frac{3}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})^6$
Przedstawmy potęgowaną liczbę w postaci trygonometrycznej:
$\frac{3}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r \cdot (cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$
$r = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

$cos\varphi = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$

$sin\varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \qquad (2)$

$(1) \quad \wedge \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$

Zatem:
$\frac{3}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot (cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sin\frac{\pi}{6})$
$(\frac{3}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})^6 = [\sqrt{3} \cdot (cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sin\frac{\pi}{6})]^6 = (stosujemy\, wzór\, Moivre'a) = (3^{\frac{1}{2}})^6 \cdot [cos(6 \cdot \frac{\pi}{6}) + i \cdot sin(6 \cdot \frac{\pi}{6})] =$
$= 3^3 \cdot (cos\pi + i \cdot sin\pi) = 27 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -27$