8.19.

$(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{26}$

$(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{26} = (\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}})^{26} \cdot (1+i)^{26} = \frac{1}{2^{13}} \cdot (1+i)^{26}$

Przedstawmy liczbę zespoloną w nawiasie w postaci trygonometrycznej:

$1 + i = r \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$

$sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

Zatem $(1 + i) = \sqrt{2} \cdot (cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$ i nasza liczba przybiera postać:

$(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{26} = \frac{1}{2^{13}} \cdot [\sqrt{2} \cdot (cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})]^{26}$

Po zastosowaniu wzore Moivre'a dostajemy:

$\frac{1}{2^{13}} \cdot [\sqrt{2} \cdot (cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})]^{26} = \frac{1}{2^{13}} \cdot (2^{\frac{1}{2}})^{26} \cdot [cos(26 \cdot \frac{\pi}{4}) + isin(26 \cdot \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2^{13}} \cdot 2^{13} \cdot [cos(\frac{13\pi}{2}) + isin(\frac{13\pi}{4})] =$

$= cos(\frac{12\pi+\pi}{2}) + isin(\frac{12\pi+\pi}{4}) = cos(6\pi + \frac{\pi}{2}) + isin(6\pi + \frac{\pi}{2}) = cos(3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}) + isin(3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}) =$

$= (okresowość\, funkcji\, sin\, i\, cos) = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$

8.20.

$(\frac{\sqrt{3}-i}{2})^{12}$

$(\frac{\sqrt{3}-i}{2})^{12} = \frac{1}{2^{12}} \cdot (\sqrt{3} - i)^{12}$

Przedzstawmy liczbę zespoloną w nawiasie w postaci trygonometrycznej:

$\sqrt{3} - i = r \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$

$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$

$sin\varphi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad (2)$

$(1) \wedge (2) \Rightarrow$ φ leży w 4-tej ćwiartce $\Rightarrow$ {stosujemy wzory:} $(cos\alpha = cos(-\alpha) \wedge -sin\alpha = sin(-\alpha)) \wedge$

$(cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}) \ \Rightarrow \ cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

Zatem $(\sqrt{3} - i) = 2 \cdot [cos(-\frac{\pi}{6}) + isin(-\frac{\pi}{6})]$ oraz

$\frac{1}{2^{12}} \cdot (\sqrt{3}-i)^{12} = \frac{1}{2^{12}} \cdot \{2 \cdot [cos(-\frac{\pi}{6}) + isin(-\frac{\pi}{6})]\}^{12} = \{stosujemy\, wzór\, Moivre'a :\} \ \frac{1}{2^{12}} \cdot 2^{12} \cdot [cos(12 \cdot (-\frac{\pi}{6})) +$

$+isin(12 \cdot (-\frac{\pi}{6}))] = cos(-2\pi) + isin(-2\pi) = \{okresowość\, funkcji\, sin\, i\, cos :\} =$

$= cos(-2\pi + 2\pi) + isin(-2\pi + 2\pi) = cos0 + isin0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

8.21.

$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, $n \in N$

Dla $n = 0$ mamy $\frac{(1+i)^0}{(1-i)^{-2}} = \frac{1}{(1-i)^{-2}} = (1-i)^2 = (1 - 2i + i^2) = 1 - 2i - 1 = -2i$

Dla $n \geqslant 1$ mamy:

$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \frac{(1+i)^{n-2} \cdot (1+i)^2}{(1-i)^{n-2}} = (\frac{1+i}{1-i})^{n-2} \cdot (1+i)^2 = \{rozwiazanie\, zadania\, \mathbf{8.11}\}\, i^{n-2} \cdot (1 + 2i + i^2) =$

$= i^{n-2} \cdot (1 + 2i - 1) = i^{n-2} \cdot 2i = 2i^{n-1}$

8.22.

$\sqrt[5]{1}$

$\sqrt[5]{1} = r \cdot (cos\varphi + isin\varphi) \quad /^5$

$1 = [r \cdot (cos\varphi + isin\varphi)]^5$

$1 = r^5 \cdot (cos5\varphi + isin5\varphi)$

$\Updownarrow$

$r = \sqrt{1^2 + 0^2} \qquad 1 = r^5 cos5\varphi \qquad 0 = r^5 sin5\varphi$

$\Updownarrow$

$r = \sqrt{1} = 1$, bo $r \in R_+ \qquad cos5\varphi = 1$ (1) $\qquad sin5\varphi = 0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow 5\varphi = 2k\pi, \quad k \in C$

$\varphi = \frac{2}{5}k\pi \ \Leftrightarrow \ \varphi = 0 \ \vee \ \varphi = \frac{2}{5}\pi \ \vee \ \varphi = \frac{4}{5}\pi \ \vee \ \varphi = \frac{6}{5}\pi \ \vee \ \varphi = \frac{8}{5}\pi$ i dla dalszych wartości k wartości funkcji cos zaczynają się powtarzać z racji jej okresowości.

$(2) \Leftrightarrow 5\varphi = k\pi, \quad k \in C$
$\varphi = \frac{1}{5}k\pi \;\Leftrightarrow\; \varphi = 0 \;\vee\; \varphi = \frac{1}{5}\pi \;\vee\; \varphi = \frac{2}{5}\pi \;\vee\; \varphi = \frac{3}{5}\pi \;\vee\; \varphi = \frac{4}{5}\pi \;\vee\; \varphi = \pi \;\vee\; \varphi = \frac{6}{5}\pi \;\vee\; \varphi = \frac{7}{5}\pi \;\vee$
$\varphi = \frac{8}{5}\pi \;\vee\; \varphi = \frac{9}{5}\pi$
i dla dalszych wartości k wartości funkcji sin zaczynają się powtarzać z racji jej okresowości.

Zatem oba warunki (1) i (2) są spełnione dla:
$\varphi = 0 \;\vee\; \varphi = \frac{2}{5}\pi \;\vee\; \varphi = \frac{4}{5}\pi \;\vee\; \varphi = \frac{6}{5}\pi \;\vee\; \varphi = \frac{8}{5}\pi$

Ostatecznie:
$\sqrt[5]{1} = cos0 + isin0 = 1$
$\sqrt[5]{1} = cos(\frac{2}{5}\pi) + isin(\frac{2}{5}\pi)$
$\sqrt[5]{1} = cos(\frac{4}{5}\pi) + isin(\frac{4}{5}\pi)$
$\sqrt[5]{1} = cos(\frac{6}{5}\pi) + isin(\frac{6}{5}\pi)$
$\sqrt[5]{1} = cos(\frac{8}{5}\pi) + isin(\frac{8}{5}\pi)$

Inny sposób:
$\sqrt[5]{1} = a + bi \qquad a, b \in R$
$\Updownarrow$
$1 = (a+bi)^5$
$1 = (a+bi)^4 \cdot (a+bi)$
$1 = [(a+bi)^2]^2 \cdot (a+bi)$
$1 = (a^2 + 2abi + b^2i^2)^2 \cdot (a+bi)$
$1 = (a^2 - b^2 + 2abi)^2 \cdot (a+bi)$
$1 = [(a^2-b^2)^2 + 2 \cdot (a^2-b^2) \cdot 2abi + (2abi)^2] \cdot (a+bi)$
$1 = [a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + (a^2-b^2) \cdot 4abi + 4a^2b^2i^2] \cdot (a+bi)$
$1 = (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^3bi - 4ab^3i - 4a^2b^2) \cdot (a+bi)$
$1 = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + 4a^3bi - 4ab^3i) \cdot (a+bi)$
$1 = a^5 - 6a^3b^2 + ab^4 + 4a^4bi - 4a^2b^3i + a^4bi - 6a^2b^3i + b^5i + 4a^3b^2i^2 - 4ab^4i^2$
$1 = (a^5 - 6a^3b^2 + ab^4 - 4a^3b^2 + 4ab^4) + (5a^4bi - 10a^2b^3i + b^5i)$
$1 = (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) + (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)i$
$0 = (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4 - 1) + (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)i$
$\Updownarrow$
$a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4 - 1 = 0 \; (3) \quad \wedge \quad 5a^4b - 10a^2b^3 + b^5 = 0 \; (4)$
Zauważmy, że dla $a = 0$ równanie (3) jest sprzeczne, więc musi być $a \neq 0$
$(4) \Leftrightarrow b(b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \;\vee\; b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4 = 0$

Podstawmy $b^2 = k, \qquad k \in R_+ \cup \{0\}$
$k^2 - 10a^2k + 5a^4 = 0$
$\Delta = (-10a^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a^4 = 100a^4 - 20a^4 = 80a^4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{80a^4} = a^2 \cdot \sqrt{16 \cdot 5} = 4a^2\sqrt{5}$

$k_1 = \frac{-(-10a^2)-4a^2\sqrt{5}}{2} = \frac{2a^2 \cdot (5-2\sqrt{5})}{2} = a^2(5-2\sqrt{5})$
$k_2 = \frac{-(-10a^2)+4a^2\sqrt{5}}{2} = \frac{2a^2 \cdot (5+2\sqrt{5})}{2} = a^2(5+2\sqrt{5})$

Zatem: $b^2 = a^2(5-2\sqrt{5}) \quad \vee \quad b^2 = a^2(5+2\sqrt{5})$

Podstawiając powyższe wartości do równania (3), otrzymujemy:
dla $b = 0$:
$a^5 - 0 + 0 - 1 = 0$
$a^5 = 1$
$a = 1$, bo $a \in R$

dla $b^2 = a^2(5-2\sqrt{5})$:
$a^5 - 10a^3 \cdot a^2(5-2\sqrt{5}) + 5a[a^2(5-2\sqrt{5})]^2 - 1 = 0$
$a^5 - 10a^5(5-2\sqrt{5}) + 5a[a^4(5-2\sqrt{5})^2] - 1 = 0$
$a^5 - 10a^5(5-2\sqrt{5}) + 5a^5(25 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5} + 4 \cdot 5) - 1 = 0$
$a^5 - 10a^5(5-2\sqrt{5}) + 5a^5(25 - 20\sqrt{5} + 20) - 1 = 0$
$a^5 - 10a^5(5-2\sqrt{5}) + 5a^5(45 - 20\sqrt{5}) - 1 = 0$
$a^5 \cdot [1 - 10 \cdot (5-2\sqrt{5}) + 5 \cdot (45-20\sqrt{5})] - 1 = 0$
$a^5 \cdot (1 - 50 + 20\sqrt{5} + 225 - 100\sqrt{5}) - 1 = 0$
$a^5 \cdot (176 - 80\sqrt{5}) = 1$
$a^5 = \frac{1}{176-80\sqrt{5}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{11-5\sqrt{5}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{11+5\sqrt{5}}{(11-5\sqrt{5})(11+5\sqrt{5})} = \frac{1}{16} \cdot \frac{11+5\sqrt{5}}{121-125} = -\frac{1}{16} \cdot \frac{11+5\sqrt{5}}{4} = -\frac{1}{64} \cdot (11+5\sqrt{5}) =$
$= -\frac{1}{64} \cdot \frac{16}{16} \cdot (11+5\sqrt{5}) = -\frac{1}{1024} \cdot (176+80\sqrt{5}) = -(\frac{1}{4})^5 \cdot (176+80\sqrt{5})$
Zauważmy teraz, że $176 + 80\sqrt{5} = (\sqrt{5}+1)^5$ (na podstawie odpowiedzi do zadania, bo nie wiem jak do tego dojść stosując logiczne/intuicyjne przekształcenia. Ale sprawdźmy to:
$(\sqrt{5}+1)^5 = [(\sqrt{5}+1)^2]^2 \cdot (\sqrt{5}+1) = (5+2\sqrt{5}+1)^2 \cdot (\sqrt{5}+1) = (6+2\sqrt{5})^2 \cdot (\sqrt{5}+1) =$
$(36 + 24\sqrt{5} + 20) \cdot (\sqrt{5}+1) = (56+24\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5}+1) = 56\sqrt{5} + 56 + 120 + 24\sqrt{5} = 176 + 80\sqrt{5}$
Zatem:
$a^5 = -(\frac{1}{4})^5 \cdot (\sqrt{5}+1)^5$
$\Updownarrow \; a \in R \backslash 0$
$a = -\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5}+1)$
oraz
$b^2 = a^2 \cdot (5-2\sqrt{5}) = [-\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5}+1)]^2 \cdot (5-2\sqrt{5}) = \frac{1}{16} \cdot (6+2\sqrt{5}) \cdot (5-2\sqrt{5}) = \frac{1}{16} \cdot (30 - 12\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 20)$
$b^2 = \frac{1}{16} \cdot (10 - 2\sqrt{5})$
$\Updownarrow \; b \in R$
$b_1 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \vee \quad b_2 = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}$

dla $b^2 = a^2(5+2\sqrt{5})$ równanie (3) przyjmuje postać:

$a^5 - 10a^3 \cdot a^2(5+2\sqrt{5}) + 5a[a^2(5+2\sqrt{5})]^2 - 1 = 0$
$a^5 - 10a^5(5+2\sqrt{5}) + 5a^5(5+2\sqrt{5})^2 - 1 = 0$
$a^5 - a^5(50+20\sqrt{5}) + 5a^5(25+20\sqrt{5}+20) = 1$
$a^5 - a^5(50+20\sqrt{5}) + a^5(125+100\sqrt{5}+100) = 1$
$a^5 - a^5(50+20\sqrt{5}) + a^5(225+100\sqrt{5}) = 1$
$a^5 \cdot [1-(50+20\sqrt{5}) + (225+100\sqrt{5})] = 1$
$a^5 \cdot (1-50-20\sqrt{5}+225+100\sqrt{5}) = 1$
$a^5 \cdot (176+80\sqrt{5}) = 1$
$a^5 = \frac{1}{176+80\sqrt{5}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{11+5\sqrt{5}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{11-5\sqrt{5}}{(11+5\sqrt{5})(11-5\sqrt{5})} = \frac{1}{16} \cdot \frac{11-5\sqrt{5}}{121-125} = -\frac{1}{16} \cdot \frac{11-5\sqrt{5}}{4} = -\frac{1}{64} \cdot (11-5\sqrt{5}) =$
$= -\frac{1}{64} \cdot \frac{16}{16} \cdot (11-5\sqrt{5}) = -\frac{1}{1024} \cdot (176-80\sqrt{5}) = -(\frac{1}{4})^5 \cdot (-1) \cdot (80\sqrt{5}-176) = (\frac{1}{4})^5 \cdot (80\sqrt{5}-176)$
Podobnie jak w poprzednim przypadku, na podstawie odpowiedzi do zadania, wnioskujemy, że
$80\sqrt{5} - 176 = (\sqrt{5}-1)^5$. Sprawdźmy to:
$(\sqrt{5}-1)^5 = [(\sqrt{5}-1)^2]^2 \cdot (\sqrt{5}-1) = (5-2\sqrt{5}+1)^2 \cdot (\sqrt{5}-1) = (6-2\sqrt{5})^2 \cdot (\sqrt{5}-1) =$
$(36-24\sqrt{5}+20) \cdot (\sqrt{5}-1) = (56-24\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5}-1) = 56\sqrt{5} - 56 - 120 + 24\sqrt{5} = 80\sqrt{5} - 176$
Zatem:
$a^5 = (\frac{1}{4})^5 \cdot (\sqrt{5}-1)^5$
$\Updownarrow \quad a \in R\backslash 0$
$a = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5}-1)$
oraz:
$b^2 = a^2 \cdot (5+2\sqrt{5}) = [\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5}-1)]^2 \cdot (5+2\sqrt{5}) = \frac{1}{16} \cdot (6-2\sqrt{5}) \cdot (5+2\sqrt{5}) = \frac{1}{16} \cdot (30+12\sqrt{5}-10\sqrt{5}-20)$
$b^2 = \frac{1}{16} \cdot (10+2\sqrt{5})$
$\Updownarrow \quad b \in R$
$b_3 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}} \qquad \vee \qquad b_4 = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Ostatecznie rozwiązaniem równania $\sqrt[5]{1} = z$ są liczby:
$z_1 = 1 + 0 \cdot i = 1$
$z_2 = -\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5}+1) + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}i = \frac{1}{4} \cdot [-(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}i]$
$z_3 = -\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5}+1) - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}i = \frac{1}{4} \cdot [-(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}i]$
$z_4 = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5}-1) + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}i = \frac{1}{4} \cdot [(\sqrt{5}-1) + \sqrt{10+2\sqrt{5}}i]$
$z_5 = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5}-1) - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}i = \frac{1}{4} \cdot [(\sqrt{5}-1) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}i]$

$\sqrt[8]{1} = ?$

$\sqrt[8]{1} = x + iy \qquad$ gdzie $x, y \in R$
$\Updownarrow$
$(x+iy)^8 = 1$
$[(x+iy)^4]^2 = 1 \quad (1)$

$(x+iy)^4 = (x+iy)^2 \cdot (x+iy)^2 = (x^2+2xyi+y^2)^2 = [(x^2-y^2)+2xyi]^2 = (x^2-y^2)^2+2\cdot(x^2-y^2)\cdot 2xyi+4x^2y^2i^2 =$
$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4xy(x^2 - y^2)i - 4x^2y^2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4xy(x^2 - y^2)i \quad (2)$

$(1) \quad \wedge \quad (2)$

$\Updownarrow$

$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4xy(x^2 - y^2)i = 1 \quad \vee \quad x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4xy(x^2 - y^2)i = -1$

$\Updownarrow$

(3) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 1 \quad \wedge \quad 4xy(x^2 - y^2) = 0$ (4)

(5) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = -1 \quad \wedge \quad 4xy(x^2 - y^2) = 0$

$4xy(x^2 - y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4xy(x - y)(x + y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \vee x = 0 \vee x = y \vee x = -y$

Podstawmy $y = 0$ do (3):

$x^4 - 6x^2 \cdot 0^2 + 0^4 = 1$

$x^4 = 1$

$\Updownarrow$

$x = 1 \vee x = -1$

Zatem liczby: $z_1 = 1 + i \cdot 0 = 1$ oraz $z_2 = -1 + i \cdot 0 = -1$ są rozwiązaniami zadania.

Podstawmy $y = 0$ do (5):

$x^4 - 6x^2 \cdot 0^2 + 0^4 = -1$

$x^4 = -1$

Czyli w tym przypadku otrzymujemy brak rozwiazań w R.

Podstawmy $x = 0$ do (3):

$0^4 - 6 \cdot 0^2 \cdot y^2 + y^4 = 1$

$y^4 = 1$

$\Updownarrow$

$y = 1 \vee y = -1$

Zatem liczby: $z_3 = 0 + i \cdot 1 = i$ oraz $z_4 = 0 + i \cdot (-1) = -i$ są rozwiązaniami zadania.

Podstawmy $x = 0$ do (5):

$0^4 - 6 \cdot 0^2 \cdot y^2 + y^4 = -1$

$y^4 = -1$

Czyli w tym przypadku otrzymujemy brak rozwiazań w R.

Podstawmy $x = y$ do (3):

$y^4 - 6 \cdot y^2 \cdot y^2 + y^4 = 1$

$2y^4 - 6y^4 = 1$

$-4y^4 = 1$

$y^4 = -\frac{1}{4}$

Równanie to nie ma rozwiązań w R więc w tym przypadku nie mamy rozwiązań zadania.

Podstawmy $x = y$ do (5):

$y^4 - 6 \cdot y^2 \cdot y^2 + y^4 = -1$

$2y^4 - 6y^4 = -1$

$-4y^4 = -1$

$y^4 = \frac{1}{4}$

$\Updownarrow$

$y^2 = \frac{1}{2} \quad \vee \quad y^2 = -\frac{1}{2}$

$\Updownarrow$

$y^2 = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zatem liczby: $z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1+i)$ oraz $z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1+i)$ są rozwiązaniami zadania.

Podstawmy $x = -y$ do (3):

$(-y)^4 - 6 \cdot (-y)^2 \cdot (-y)^2 + y^4 = 1$

$y^4 - 6 \cdot y^2 \cdot y^2 + y^4 = 1$

Równanie sprowadziło się do przypadku już wcześniej obliczonego i nie wnosi dodatkowych rozwiązań.

Podstawmy $x = -y$ do (5):

$(-y)^4 - 6 \cdot (-y)^2 \cdot (-y)^2 + y^4 = -1$

$y^4 - 6 \cdot y^2 \cdot y^2 + y^4 = -1$

To równanie także sprowadziło się do przypadku już wcześniej obliczonego i nie wnosi dodatkowych rozwiązań.

Podsumowując rozwiazaniami zadania są liczby: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$, $z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1+i)$ oraz $z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1+i)$

8.23.

$(1 + i\sqrt{3})(1+i)(cos\alpha + isin\alpha) = z$

$(1+i\sqrt{3})(1+i)(cos\alpha+isin\alpha) = (1+i+i\sqrt{3}+i^2\sqrt{3})(cos\alpha+isin\alpha) = [(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})](cos\alpha+isin\alpha)$

Mamy:

$cos\alpha + isin\alpha = 1 \cdot (cos\alpha + isin\alpha) = x + iy$

Zatem:

$r = 1 = \sqrt{x^2+y^2}$ (1), $\quad cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$ (2), $\quad sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$ (3)

i

$[(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})](cos\alpha + isin\alpha) = [(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})](x+iy) =$
$= x + iy - \sqrt{3}x - i\sqrt{3}y + ix + i^2y + i\sqrt{3}x + i^2\sqrt{3}y = (x - \sqrt{3}x - y - \sqrt{3}y) + i(y - \sqrt{3}y + x + \sqrt{3}x) =$
$= [(1-\sqrt{3})x - (1+\sqrt{3})y] + i[(1-\sqrt{3})y + (1+\sqrt{3})x]$ (4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow R = \sqrt{[(1-\sqrt{3})x - (1+\sqrt{3})y]^2 + [(1-\sqrt{3})y + (1+\sqrt{3})x]^2} =$

$= \sqrt{(1-\sqrt{3})^2x^2 - 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})xy + (1+\sqrt{3})^2y^2 + (1-\sqrt{3})^2y^2 - 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})xy + (1+\sqrt{3})^2x^2} =$

$= \sqrt{(1-\sqrt{3})^2(x^2+y^2) + (1+\sqrt{3})^2(x^2+y^2)} = Uwzgl\text{ę}dniaj\text{ą}c\,(1)$

$= \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 \cdot 1 + (1+\sqrt{3})^2 \cdot 1} = \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

Mamy więc: $z = R \cdot (cos\varphi + isin\varphi) = 2\sqrt{2}(cos\varphi + isin\varphi)$

gdzie na podstawie (2), (3) i (4):

$cos\varphi = \frac{(1-\sqrt{3})x-(1+\sqrt{3})y}{2\sqrt{2}} = \frac{x-y-\sqrt{3}(x+y)}{2\sqrt{2}} = \frac{cos\alpha - sin\alpha - \sqrt{3}(cos\alpha + sin\alpha)}{2\sqrt{2}}$ (5)

$sin\varphi = \frac{(1-\sqrt{3})y+(1+\sqrt{3})x}{2\sqrt{2}} = \frac{y+x-\sqrt{3}(y-x)}{2\sqrt{2}} = \frac{sin\alpha + cos\alpha + \sqrt{3}(cos\alpha - sin\alpha)}{2\sqrt{2}}$ (6)

(5) i (6) przekształcamy dalej korzystając z wzorów:

$cos\alpha - sin\alpha = \sqrt{2}cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \sqrt{2}sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$

$cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sqrt{2}sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

$cos\alpha = sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$sin\alpha = sin(\pi - \alpha)$

$cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta = cos(\alpha + \beta)$

$sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta = sin(\alpha + \beta)$

$(5) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot [\sqrt{2}cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)] = \frac{1}{2} \cdot cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) =$
$= cos\frac{\pi}{3} \cdot cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) - sin\frac{\pi}{3}sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} - \alpha)) = cos\frac{\pi}{3} \cdot cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) - sin\frac{\pi}{3}sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) =$
$= cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \alpha) = cos(\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} + \alpha) = cos(\frac{7\pi}{12} + \alpha) \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{12} + \alpha$ (7)

$(6) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot [\sqrt{2}sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)] = \frac{1}{2}sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) =$
$= \frac{1}{2}cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + \alpha)) + \frac{\sqrt{3}}{2}sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = sin\frac{\pi}{6} \cdot cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) + cos\frac{\pi}{6} \cdot sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) =$
$= sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} - \alpha) = sin(\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} - \alpha) = sin(\frac{5\pi}{12} - \alpha) = sin(\pi - (\frac{5\pi}{12} - \alpha)) = sin(\frac{12\pi - 5\pi}{12} + \alpha) =$

$= sin(\frac{7\pi}{12} + \alpha) \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{12} + \alpha \quad (8)$

W obu przypadkach (7) i (8) otrzymaliśmy ten sam argument szukanej liczby zespolonej, zatem jej postać trygonometryczna wygląda nastepująco:
$z = 2\sqrt{2} \cdot [cos(\frac{7}{12}\pi + \alpha) + isin(\frac{7}{12}\pi + \alpha)]$