8.24.

$\sqrt{i}$

$\sqrt{i} = r \cdot (cos\alpha + isin\alpha)$

Liczbę zespoloną i przedstawiamy w postaci trygonometrycznej:

$i = r \cdot (cos\alpha + isin\alpha)$, $r \in R_+ \quad \alpha \in [0, 2\pi]$

Przyrównując części rzeczywiste i urojone dostajemy układ równań:

$0 = rcos\alpha \quad \wedge \quad 1 = rsin\alpha$

Podnieśmy oba równania stronami do kwadratu:

$$\begin{cases} 0 = r^2cos^2\alpha \\ 1 = r^2sin^2\alpha \end{cases}$$

Dodajmy je teraz stronami:

$1 = r^2sin\alpha + r^2cos^2\alpha$

$1 = r^2 \cdot (sin^2\alpha + cos^2\alpha)$

$r^2 = 1$

$r = 1$

Zatem

$0 = 1 \cdot cos\alpha \;\Leftrightarrow\; cos\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{2} \;\vee\; \alpha = \frac{3\pi}{2}$

oraz

$1 = 1 \cdot sin\alpha \;\Leftrightarrow\; sin\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{2}$

I mamy:

$i = 1 \cdot (cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}) \quad (1)$

Przedstawmy teraz w postaci trygonometrycznej liczbę daną w zadaniu:

$\sqrt{i} = R \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$, $R \in R_+ \quad \alpha \in [0, 2\pi]$

Podnieśmy powyższe równanie stronami do kwadratu:

$i = [R(cos\varphi + isin\varphi)]^2$

Przekształcamy powyższe równania stosując wzór Moivre'a:

$i = R^2 \cdot (cos2\varphi + isin2\alpha)$

A ponieważ zachodzi (1), więc mamy:

$R^2 = 1 \quad \wedge \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in C$

$\Updownarrow$

$R = 1 \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$

A stąd dla $k \in \{0, 1\}$ mamy:

$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$,

$\alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

Dla k różnych od 1 i 2 otrzymalibyśmy po odrzuceniu okresu 2π te same wartości kąta α.

Zatem:

$\sqrt{i} = cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}$

oraz

$\sqrt{i} = cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}$

Inny sposób (dla $x, y \in R$):

$$\sqrt{i} = x + iy \;\Leftrightarrow\; i = x^2 + 2ixy + i^2y^2 \;\Leftrightarrow\; i = x^2 - y^2 + 2ixy \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ y = \frac{1}{2x} & (2) \end{cases}$$

Podstawiamy (2) do (1):

$x^2 - (\frac{1}{2x})^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^4 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\vee\; x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Obliczmy teraz y:

$y_1 = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \;\vee\; y_2 = -\frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \;\Leftrightarrow\; y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\vee\; y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

I ostatecznie mamy:

$\sqrt{i} = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$

8.25.

$\sqrt[3]{1}$

$\sqrt[3]{1} = x + iy \;\Leftrightarrow\; (x + iy)^3 = 1, \qquad x, y \in R$

$(x + iy)^2 \cdot (x + iy) = 1$

$(x^2+2ixy+i^2y^2)\cdot(x+iy)=1$
$(x^2-y^2+2ixy)\cdot(x+iy)=1$
$x^3+ix^2y-xy^2-iy^3+2ix^2y-2xy^2=1$
$(x^3-xy^2-2xy^2)+i(x^2y-y^3+2x^2y)=1$
$(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)=1$
$(x^3-3xy^2)+iy(3x^2-y^2)=1$
$\Updownarrow$
$x^3-3xy^2=1 \ \ (1) \quad \wedge \quad y(3x^2-y^2)=0 \ \ (2)$
Weźmy najpierw pod uwagę drugi warunek:
$y\cdot(3x^2-y^2)=0$
$y\cdot(\sqrt{3}x-y)\cdot(\sqrt{3}x+y)=0$
$\Updownarrow$
$y=0 \ \vee \ y=\sqrt{3}x \ \vee \ y=-\sqrt{3}x$

$I.\ \ y=0$
Podstawmy to do (1):
$x^3-0=1$
$x^3=1$
$x=1$
Zatem pierwsze rozwiązanie jest następujące: $z_1=1$

$II.\ \ y=\sqrt{3}x$
Podstawmy to do (1):
$x^3-3x\cdot(\sqrt{3}x)^2=1$
$x^3-3x\cdot 3x^2=1$
$x^3-9x^3-1=0$
$-8x^3-1=0$
$8x^3+1=0$
$(2x)^3+1^3=0$
Korzystamy teraz z wzoru: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$:
$(2x+1)[(2x)^2-2x+1)=0$
$(2x+1)(4x^2-2x+1)=0$
$\Updownarrow$
$2x+1=0 \quad \vee \quad 4x^2-2x+1=0$
$2x=-1 \qquad\qquad \Delta=(-2)^2-4\cdot4\cdot1=4-16=-12<0$, zatem to równanie nie ma rozwiazania
$x=-\frac{1}{2}$
I stąd $y=\sqrt{3}\cdot(-\frac{1}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Zatem drugie rozwiązanie jest następujące: $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Leftrightarrow \quad z_2=1\cdot(cos\varphi+isin\varphi)$
$cos\varphi=-\frac{1}{2} \quad \wedge \quad sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Downarrow \quad \varphi\in III$ *ćwiartki* $\quad \wedge \quad cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \quad \wedge \quad sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad cos(\pi+\alpha)=-cos\alpha \quad \wedge \quad sin(\pi+\alpha)=-sin\alpha$
$\varphi=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$
Więc ostatecznie:
$z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=cos\frac{4}{3}\pi+isin\frac{4}{3}\pi$

$III.\ \ y=-\sqrt{3}x$
Podstawmy to do (1):
$x^3-3x\cdot(-\sqrt{3}x)^2=1$
$x^3-3x\cdot 3x^2=1$
Widzimy, że mamy tu to samo równanie co w powyższym punkcie. A więc $x=-\frac{1}{2}$
I stąd $y=-\sqrt{3}\cdot(-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$
Zatem trzecie rozwiązanie jest następujące: $z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Leftrightarrow \quad z_3=1\cdot(cos\varphi+isin\varphi)$
$cos\varphi=-\frac{1}{2} \quad \wedge \quad sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Downarrow \quad \varphi\in II$ *ćwiartki* $\quad \wedge \quad cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \quad \wedge \quad sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad cos(\pi-\alpha)=-cos\alpha \quad \wedge \quad sin(\pi-\alpha)=sin\alpha$
$\varphi=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$
Więc ostatecznie:
$z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=cos\frac{2}{3}\pi+isin\frac{2}{3}\pi$

8.26.

$\sqrt[3]{i} = (x+iy) \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)^3 = i, \qquad\qquad x, y \in R, \quad y \neq 0$

Zastosujmy w powyższym równaniu wzór $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

$x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3 = i$

$(x^3 - 3xy^2) + i \cdot (3x^2y - y^3) = i$

$\Updownarrow$

$x^3 - 3xy^2 = 0 \;\; (1) \qquad \wedge \qquad 3x^2y - y^3 = 1 \;\; (2)$

Rozpatrzmy równanie (1):

$x^3 - 3xy^2 = 0$

$x \cdot (x^2 - 3y^2) = 0$

$x \cdot (x - \sqrt{3}y) \cdot (x + \sqrt{3}y) = 0$

$\Updownarrow$

$x = 0 \quad \vee \quad x - \sqrt{3}y = 0 \quad \vee \quad x + \sqrt{3}y = 0$

I. $x = 0$

Podstawmy to do (2):

$3 \cdot 0^2 \cdot y - y^3 = 1$

$-y^3 = 1$

$y^3 = -1$

$y = -1$

Więc $z_1 = 0 + i \cdot (-1) = -i$

II. $x - \sqrt{3}y = 0$

$x = \sqrt{3}y$

Podstawmy to do (2):

$3 \cdot (\sqrt{3}y)^2 \cdot y - y^3 = 1$

$9y^3 - y^3 = 1$

$8y^3 = 1$

$2^3y^3 - 1 = 0$

$(2y)^3 - 1^3 = 0$

$\Updownarrow$ *stosujemy wzór* : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(2y - 1) \cdot [(2y)^2 + 2y \cdot 1 + 1^2] = 0$

$(2y - 1)(4y^2 + 2y + 1) = 0$

$\Updownarrow$

$2y - 1 = 0 \quad \vee \quad 4y^2 + 2y + 1 = 0$

$2y = 1 \qquad \vee \quad \Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4 - 16 = -12 < 0$

$y = \frac{1}{2} \qquad \vee$ Powyższe równanie nie ma rozwiązania

Mamy więc: $x = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$

III. $x + \sqrt{3}y = 0$

$x = -\sqrt{3}y$

Podstawmy to do (2):

$3 \cdot (-\sqrt{3}y)^2 \cdot y - y^3 = 1$

$9y^2 \cdot y - y^3 = 1$

$8y^3 = 1$

Czyli dalsze obliczenia wyglądają identycznie jak w poprzednim przypadku

$\Downarrow$

$y = \frac{1}{2}$

Mamy więc: $x = -\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$

8.27.

$\sqrt[4]{-1} = x + iy, \qquad$ dla $x, y \in R$

$-1 = (x+iy)^4$
$-1 = [(x+iy)^2]^2$
$-1 = (x^2 + i \cdot 2xy + i^2y^2)^2$
$-1 = (x^2 - y^2 + i \cdot 2xy)^2$
$\Updownarrow$
$x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = i \quad \vee \quad x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = -i$

$I.\ x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = i$
$x^2 - y^2 = 0 \ \wedge \ 2xy = 1 \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0$
$\Downarrow$
$y = \frac{1}{2x}$
$x^2 - (\frac{1}{2x})^2 = 0$
$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \ / \cdot 4x^2$
$4x^4 - 1 = 0$
$4x^4 = 1$
$x^4 = \frac{1}{4}$
$(x^2)^2 = \frac{1}{4}$
$x^2 = \frac{1}{2}$
$x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y_2 = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{2}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$II.\ x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = -i$
$x^2 - y^2 = 0 \ \wedge \ 2xy = -1 \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0$
$\Downarrow$
$y = -\frac{1}{2x}$
$x^2 - (-\frac{1}{2x})^2 = 0$
$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \ / \cdot 4x^2$
$\Updownarrow$ Obliczenia identyczne jak dla punktu wyżej:
$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y_4 = -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Przedstawmy teraz znalezione liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:
$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad r = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$
Ponieważ wszystkie pozostałe liczby zespolone różnią się tylko znakiem przy części zespolonej i urojonej, więc moduł r dla każdej z nich bedzie identyczny (równy 1).
$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot (cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}) = cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}$

$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\Updownarrow \ cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -cos\frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -sin\frac{\pi}{4}$
$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + i \cdot sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = cos\frac{5}{4}\pi + i \cdot sin\frac{5}{4}\pi$

$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\Updownarrow \ cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = cos\frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -sin\frac{\pi}{4}$
$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) + i \cdot sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = cos\frac{7}{4}\pi + i \cdot sin\frac{7}{4}\pi$

$z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\Updownarrow \ cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -cos\frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = sin\frac{\pi}{4}$
$z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i \cdot sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = cos\frac{3}{4}\pi + i \cdot sin\frac{3}{4}\pi$

8.28.
$\sqrt[3]{-1+i}$
Przedstawmy liczbę $-1+i$ w postaci trygonometrycznej:
$-1 + i = r(cos\varphi + isin\varphi)$
$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$r \cdot cos\varphi = -1 \quad \wedge \quad r \cdot sin\varphi = 1$
$cos\varphi = \frac{-1}{r} \quad \wedge \quad sin\varphi = \frac{1}{r}$
$cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Mamy: $cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -cos\frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = sin\frac{\pi}{4}$
Zatem $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ i $-1 + i = \sqrt{2} \cdot (cos\frac{3}{4}\pi + isin\frac{3}{4}\pi)$ (1)
Oznaczmy teraz $\sqrt[3]{-1+i} = r_2 \cdot (cos\alpha + isin\alpha)$ i podnieśmy obie strony tego równania do trzeciej potęgi:
$-1 + i = [r_2 \cdot (cos\alpha + isin\alpha)]^3$
Zastosujmy wzór Moivre'a do prawej strony:
$-1 + i = r_2^3 \cdot (cos3\alpha + isin3\alpha)$ (2)
Równania (1) i (2) są spełnione dla:
$r_2^3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow r_2 = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$
oraz
$3\alpha = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in C$
Czyli mamy następujące różne wartości:
$\alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$
$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{12}\pi + \frac{8}{12}\pi = \frac{11}{12}\pi$
$\alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{4}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{12}\pi + \frac{16}{12}\pi = \frac{19}{12}\pi$
$\alpha_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \pi = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{4} = \alpha_0$
i dalej wartości α zaczynaja się powtarzać. Zatem rozwiązaniem zadania są liczby:
$z_0 = \sqrt[6]{2} \cdot (cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$
$z_1 = \sqrt[6]{2} \cdot (cos\frac{11}{12}\pi + isin\frac{11}{12}\pi)$
$z_3 = \sqrt[6]{2} \cdot (cos\frac{19}{12}\pi + isin\frac{19}{12}\pi)$

8.29.
$\sqrt{3+4i} = x + iy$, $\quad x, y \in R$
$3 + 4i = (x + iy)^2$
$3 + 4i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$
$3 + 4i = x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$
$\Updownarrow$
$x^2 - y^2 = 3 \quad \wedge \quad 2xy = 4 \quad x, y \neq 0$
$y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$

$x^2 - (\frac{2}{x})^2 = 3$
$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \quad / \cdot x^2$
$x^4 - 4 = 3x^2$
$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
Podstawmy $k = x^2$, $k \geqslant 0$:
$k^2 - 3k - 4 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$
$\sqrt{\Delta} = 5$
$k_1 = \frac{-(-3)-5}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$
$k_2 = \frac{-(-3)+5}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$
Pod uwagę bierzemy tylko k_2, bo pierwsze jest ujemne. Zatem:
$x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2 \quad \vee \quad x_2 = -2$
$y_1 = \frac{2}{2} = 1$
$y_2 = \frac{2}{-2} = -1$
Ostatecznie rozwiązaniem zadania są liczby:
$z_1 = 2 + i$
$z_1 = -2 - i$

8.30.
$\sqrt[3]{2-2i}$
Przedstawmy liczbę $2 - 2i$ w postaci trygonometrycznej:
$2 - 2i = r \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$

$\Downarrow$
$rcos\varphi = 2 \ /^2 \quad \wedge \quad rsin\varphi = -2 \ /^2$
$r^2cos^2\varphi = 4 \quad \wedge \quad r^2sin^2\varphi = 4$
Dodajmy oba powyższe równania stronami:
$r^2cos^2\varphi + r^2sin^2\varphi = 4 + 4$
$r^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi) = 8$
$r^2 = 8$
$r = \sqrt{8}$
$r = \sqrt{4 \cdot 2}$
$r = 2\sqrt{2}$
Teraz możemy obliczyć argument:
$cos\varphi = \frac{2}{r} \quad \wedge \quad sin\varphi = -\frac{2}{r}$
$cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} \quad \wedge \quad sin\varphi = -\frac{2}{2\sqrt{2}}$
$cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \wedge \quad sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\Updownarrow$
$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$
Zatem:
$2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot (cos\frac{7}{4}\pi + isin\frac{7}{4}\pi) \quad (1)$
Oznaczmy teraz:
$\sqrt[3]{2-2i} = r_2 \cdot (cos\alpha + isin\alpha) \ /^3$
$2 - 2i = r_2^3 \cdot (cos3\alpha + isin3\alpha) \quad (2)$
Równania (2) i (3) są spełnione dla:
$r_2^3 = 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad r_2 = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
oraz
$3\alpha = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$, dla $k \in C$
$\alpha = \frac{7}{3\cdot 4}\pi + \frac{2}{3}k\pi = \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

$\alpha_0 = \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot \pi = \frac{7}{12}\pi$
$\alpha_1 = \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{7}{12}\pi + \frac{8}{12}\pi = \frac{15}{12}\pi$
$\alpha_2 = \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{7}{12}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{7}{12}\pi + \frac{16}{12}\pi = \frac{23}{12}\pi$
dla $k > 2$ wartości α po odrzuceniu okresu 2π zaczynają się powtarzać. Zatem rozwiązaniem zadania są następujące liczby zespolone:
$z_k = \sqrt{2} \cdot [cos(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi) + isin(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi)]$, dla $k \in \{0, 1, 2\}$

8.31.
$\sqrt[6]{-27}$
Przedstawmy liczbę -27 w postaci trygonometrycznej:
$-27 = r(cos\varphi + isin\varphi)$
$\Downarrow$
$rcos\varphi = -27 \ /^2 \quad \wedge \quad rsin\varphi = 0 \ /^2$
$r^2cos^2\varphi = (-27)^2 \quad \wedge \quad r^2sin^2\varphi = 0$
Dodajmy oba powyższe równania stronami:
$r^2cos^2\varphi + r^2sin^2\varphi = (-27)^2$
$r^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi) = (-27)^2$
$r^2 = 27^2$
$r = 27$
Zatem mamy:
$27 \cdot cos\varphi = -27 \quad \wedge \quad 27 \cdot sin\varphi = 0$
$cos\varphi = -1 \quad \wedge \quad sin\varphi = 0$
$\Updownarrow$
$\varphi = \pi$
Czyli:
$-27 = 27 \cdot (cos\pi + isin\pi) \quad (1)$
Oznaczmy teraz:
$\sqrt[6]{-27} = r_2 \cdot (cos\alpha + isin\alpha) \ /^6$
$-27 = r_2^6 \cdot (cos6\alpha + isin6\alpha) \quad (2)$

$(1) \wedge (2) \quad \Leftrightarrow \quad r_2^6 = 27 \ \wedge \ 6\alpha = \pi + 2k\pi$, dla $k \in C$
$r_2 = (27)^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$6\alpha = \pi + 2k\pi$
$\alpha = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6}k\pi$
a więc:
$\alpha_0 = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6} \cdot 0 \cdot \pi = \frac{1}{6}\pi$
$\alpha_1 = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6}\pi = \frac{3}{6}\pi$
$\alpha_2 = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{6}\pi + \frac{4}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$
$\alpha_3 = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6} \cdot 3 \cdot \pi = \frac{1}{6}\pi + \frac{6}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$
$\alpha_4 = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6} \cdot 4 \cdot \pi = \frac{1}{6}\pi + \frac{8}{6}\pi = \frac{9}{6}\pi$
$\alpha_5 = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6} \cdot 5 \cdot \pi = \frac{1}{6}\pi + \frac{10}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$
dla $k > 5$ wartości α po odrzuceniu okresu 2π zaczynają się powtarzać. Zatem rozwiązaniem zadania są następujące liczby zespolone:
$z_k = \sqrt{3} \cdot [cos(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6}k\pi) + isin(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{6}k\pi)] = \sqrt{3} \cdot [cos(\frac{1}{6}\pi + \frac{k}{3}\pi) + isin(\frac{1}{6}\pi + \frac{k}{3}\pi)]$, dla $k \in \{0, 1, 2\}$

8.32.
$x^4 - 1 = 0$
$(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x^2 = -1 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad x = -1 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = i \ \vee \ x = -i$

8.33.
$x^4 - i = 0$
$x^4 = i$
Oznaczmy teraz: $x = a + bi$, gdzie $a, b \in R$
$[(a + bi)^2]^2 = i$
$(a^2 + 2abi + b^2 \cdot i^2)^2 = i$
$[(a^2 - b^2) + 2abi]^2 = i$
$(a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 - b^2) \cdot 2abi + 4a^2b^2i^2 = i$
$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2 \cdot abi - 4b^2 \cdot abi - 4a^2b^2 = i$
$(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + i \cdot (4a^3b - 4ab^3) = i$
$\Updownarrow$
$a^4 + b^4 - 6a^2b^2 = 0 \quad \wedge \quad 4a^3b - 4ab^3 = 1 \quad (1)$
$(a^2)^2 - 2a^2b^2 + (b^2)^2 - 4a^2b^2 = 0$
$(a^2 - b^2)^2 - (2ab)^2 = 0$
$(a^2 - b^2 - 2ab) \cdot (a^2 - b^2 + 2ab) = 0$
$\Updownarrow$
$a^2 - b^2 - 2ab = 0 \quad \vee \quad a^2 - b^2 + 2ab = 0$
$a^2 - 2ab + b^2 - 2b^2 = 0 \quad \vee \quad a^2 + 2ab + b^2 - 2b^2 = 0$
$(a - b)^2 - (\sqrt{2}b)^2 = 0 \quad \vee \quad (a + b)^2 - (\sqrt{2}b)^2 = 0$
$(a - b - \sqrt{2}b) \cdot (a - b + \sqrt{2}b) = 0 \quad \vee \quad (a + b - \sqrt{2}b) \cdot (a + b + \sqrt{2}b) = 0$
$\Updownarrow$
$a - b - \sqrt{2}b = 0 \quad \vee \quad a - b + \sqrt{2}b = 0 \quad \vee \quad a + b - \sqrt{2}b = 0 \quad \vee \quad a + b + \sqrt{2}b = 0$

Przypadek I. $a - b - \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow a = b + \sqrt{2}b$
Podstawmy to do (1):
$4(b + \sqrt{2}b)^3b - 4(b + \sqrt{2}b)b^3 = 1$
$4[b^3 + 3b^2 \cdot \sqrt{2}b + 3b(\sqrt{2}b)^2 + (\sqrt{2}b)^3] \cdot b - 4b^4 - 4\sqrt{2}b^4 = 1$
$4(b^3 + 3\sqrt{2}b^3 + 6b^3 + 2\sqrt{2}b^3) \cdot b - 4(b^4 + \sqrt{2}b^4) = 1$
$4(7b^4 + 5\sqrt{2}b^4 - b^4 - \sqrt{2}b^4) = 1$
$4(6b^4 + 4\sqrt{2}b^4) = 1$
$b^4 \cdot (24 + 16\sqrt{2}) = 1$
$b^4 = \frac{1}{24+16\sqrt{2}} = \frac{1}{8\cdot(3+2\sqrt{2})} = \frac{1}{8\cdot(1+2\sqrt{2}+2)} = \frac{1}{8\cdot(1^2+2\cdot1\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2)} = \frac{1}{8\cdot(1+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{(2\sqrt{2})^2\cdot(1+\sqrt{2})^2} = (\frac{1}{(2\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})})^2$
$b^2 = \frac{1}{(2\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}+2\cdot2} = \frac{1}{2\sqrt{2}+4} = \frac{2\sqrt{2}-4}{(2\sqrt{2}+4)\cdot(2\sqrt{2}-4)} = \frac{2\sqrt{2}-4}{(2\sqrt{2})^2-4^2} = \frac{2(\sqrt{2}-2)}{4\cdot2-16} = \frac{\sqrt{2}-2}{4-8} = \frac{\sqrt{2}-2}{-4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$
A więc:
$b = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \vee \quad b = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Stąd:

$a = b + \sqrt{2}b = b(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot (1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})\cdot(1+2\sqrt{2}+2)} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})\cdot(3+2\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\sqrt{6+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

oraz:

$a = b + \sqrt{2}b = b(1+\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot (1+\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})\cdot(1+2\sqrt{2}+2)} =$
$= -\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})\cdot(3+2\sqrt{2})} = -\frac{1}{2}\sqrt{6+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\cdot 2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Zatem pierwsze dwa rozwiązania są nastepujące:

$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Przypadek II. $a - b + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow a = b - \sqrt{2}b$

Podstawmy to do (1):

$4(b-\sqrt{2}b)^3 b - 4(b-\sqrt{2}b)b^3 = 1$
$4[b^3 - 3b^2\cdot\sqrt{2}b + 3b(\sqrt{2}b)^2 - (\sqrt{2}b)^3]\cdot b - 4(b^4 - \sqrt{2}b^4) = 1$
$4(b^3 - 3\sqrt{2}b^3 + 6b^3 - 2\sqrt{2}b^3)\cdot b - 4(b^4 - \sqrt{2}b^4) = 1$
$4(7b^4 - 5\sqrt{2}b^4 - b^4 + \sqrt{2}b^4) = 1$
$4(6b^4 - 4\sqrt{2}b^4) = 1$
$b^4(6-4\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$
$b^4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6-4\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-2\cdot 1\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2} = (\frac{1}{(2\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})})^2$
$\Updownarrow\ 1-\sqrt{2} < 0$
$b^2 = \frac{-1}{(2\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}\cdot(2+\sqrt{2})$

A więc:

$b = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \vee \quad b = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Stąd:

$a = b - \sqrt{2}b = b(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot(1-\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1) = -\frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-1)^2} =$
$= -\frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(2-2\sqrt{2}+1)} = -\frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(3-2\sqrt{2})} = -\frac{1}{2}\sqrt{6-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\cdot 2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

oraz:

$a = b - \sqrt{2}b = b(1-\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-1)^2} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(2-2\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(3-2\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\sqrt{6-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Zatem kolejne dwa rozwiązania są nastepujące:

$x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Przypadek III. $a + b - \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}b - b$

Podstawmy to do (1):

$4(\sqrt{2}b-b)^3 b - 4(\sqrt{2}b-b)b^3 = 1$
$[(\sqrt{2}b)^3 - 3(\sqrt{2}b)^2 b + 3\sqrt{2}b\cdot b^2 - b^3]\cdot b - (\sqrt{2}b^4 - b^4) = \frac{1}{4}$
$(2\sqrt{2}b^3 - 3\cdot 2\cdot b^2\cdot b + 3\sqrt{2}b^3 - b^3)\cdot b - \sqrt{2}b^4 + b^4 = \frac{1}{4}$
$2\sqrt{2}b^4 - 3\cdot 2\cdot b^4 + 3\sqrt{2}b^4 - b^4 - \sqrt{2}b^4 + b^4 = \frac{1}{4}$
$5\sqrt{2}b^4 - 7\cdot b^4 - \sqrt{2}b^4 + b^4 = \frac{1}{4}$
$4\sqrt{2}b^4 - 6\cdot b^4 = \frac{1}{4}$
$b^4\cdot(4\sqrt{2}-6) = \frac{1}{4}$
$b^4 = \frac{1}{4\cdot(4\sqrt{2}-6)}$

Ale $4\sqrt{2}-6 < 0$, więc prawa strona powyższego równania jest ujemna. Nie ma więc ono rozwiązania w tym przypadku, gdyż $b^4 \geqslant 0$.

Przypadek IV. $a + b + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow a = -(b+\sqrt{2}b)$

Podstawmy to do (1):

$4[-(b+\sqrt{2}b)]^3 b - 4[-(b+\sqrt{2}b)]b^3 = 1$
$4[-(b^3 + 3b^2\sqrt{2}b + 3b(\sqrt{2}b)^2 + (\sqrt{2}b)^3)]\cdot b + 4(b^4 + \sqrt{2}b^4) = 1$
$4[-(b^3 + 3\sqrt{2}b^3 + 6\cdot b^3 + 2\sqrt{2}b^3)]\cdot b + 4(b^4 + \sqrt{2}b^4) = 1$
$4[-(7b^3 + 5\sqrt{2}b^3)]\cdot b + 4(b^4 + \sqrt{2}b^4) = 1$
$-4(7b^4 + 5\sqrt{2}b^4) + 4(b^4 + \sqrt{2}b^4) = 1$
$-7b^4 - 5\sqrt{2}b^4 + b^4 + \sqrt{2}b^4 = \frac{1}{4}$
$-6b^4 - 4\sqrt{2}b^4 = \frac{1}{4}$

$-b^4(6+4\sqrt{2})=\frac{1}{4}$
Tutaj także mamy równanie sprzeczne, gdyż lewa strona zawsze jest ujemna lub równa 0.
Ostatecznie rozwiązaniem zadania są następujące liczby zespolone:
$x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$x_3=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$x_4=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

8.34.
$x^6+64=0$
$x^6+2^6=0$
$x^6=-2^6$
Oznaczmy teraz: $x=r(cos\alpha+isin\alpha),\ \ r>0$
$[r(cos\alpha+isin\alpha)]^6=-2^6$
$\Updownarrow\ wzór\ Moivre'a$
$r^6(cos6\alpha+isin6\alpha)=-2^6$
$r^6cos6\alpha+ir^6sin6\alpha=-2^6$

$$\begin{cases}r^6cos6\alpha=-2^6\\ r^6sin6\alpha=0\end{cases}$$
Podnieśmy oba powyższe równania do kwadratu i dodajmy je stronami:
$(r^6cos6\alpha)^2+(r^6sin6\alpha)^2=(-2^6)^2$
$(r^6)^2\cdot(cos^26\alpha+sin^26\alpha)=(2^6)^2$
$(r^6)^2=(2^6)^2$
$r^6=2^6$
$r=2$ (bo $r>0$)
Układ równań przybiera więc postać:
$$\begin{cases}2^6cos6\alpha=-2^6\\ 2^6sin6\alpha=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}cos6\alpha=-1\\ sin6\alpha=0\end{cases}$$
$\Updownarrow$
$6\alpha=\pi+2k\pi,\quad k\in C$
$\alpha=\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{6}\cdot k\pi$
Czyli:
$\alpha_0=\frac{1}{6}\pi+0=\frac{1}{6}\pi$
$\alpha_1=\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{6}\cdot1\cdot\pi=\frac{3}{6}\pi$
$\alpha_2=\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{6}\cdot2\cdot\pi=\frac{5}{6}\pi$
$\alpha_3=\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{6}\cdot3\cdot\pi=\frac{7}{6}\pi$
$\alpha_4=\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{6}\cdot4\cdot\pi=\frac{9}{6}\pi$
$\alpha_5=\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{6}\cdot5\cdot\pi=\frac{11}{6}\pi$
Dalej dla $k>5$ wartości argumentu α po odrzuceniu okresu 2π zaczynają się powtarzać.
Rozwiązaniem zadania są więc liczby zespolone postaci:
$z_k=2\cdot[cos(\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{3}k\pi)+i\cdot sin(\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{3}k\pi)],\quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}$