8.35.

$x^5 - 1024 = 0$
$x^5 - 2^{10} = 0$
$x^5 - (2^2)^5 = 0$
$x^5 - 4^5 = 0$
$x^5 = 4^5$

Oznaczmy: $x = r(cos\alpha + isin\alpha), \quad r > 0$
Mamy: $[r(cos\alpha + isin\alpha)]^5 = 4^5$
Stosujemy wzór Moivre'a:
$r^5(cos5\alpha + isin5\alpha) = 4^5$
Zatem musi zachodzić:
$$\begin{cases} r^5 cos5\alpha = 4^5 \\ r^5 sin5\alpha = 0 \end{cases}$$
Podnieśmy oba równania do kwadratu i dodajmy stronami:
$(r^5cos5\alpha)^2 + (r^5sin5\alpha)^2 = (4^5)^2 + 0^2$
$(r^5)^2 \cdot (cos^2 5\alpha + sin^2 5\alpha) = (4^5)^2$
$(r^5)^2 \cdot 1 = (4^5)^2$
$r^5 = 4^5$
$r = 4$
Układ równań przybiera więc postać:
$$\begin{cases} 4^5 cos5\alpha = 4^5 \\ 4^5 sin5\alpha = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} cos5\alpha = 1 \\ sin5\alpha = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 5\alpha = 2k\pi, \ \ k \in C \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tfrac{2}{5}k\pi, \ \ k \in C$$
Czyli:
$\alpha_0 = \frac{2}{5} \cdot 0 \cdot \pi = 0$
$\alpha_1 = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{2}{5}\pi$
$\alpha_2 = \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{4}{5}\pi$
$\alpha_3 = \frac{2}{5} \cdot 3 \cdot \pi = \frac{6}{5}\pi$
$\alpha_4 = \frac{2}{5} \cdot 4 \cdot \pi = \frac{8}{5}\pi$
Dalej, dla $k > 4$ wartości argumentu α po odrzuceniu okresu 2π zaczynają się powtarzać. Zatem ostatecznie rozwiązaniem zadania są następujące liczby zespolone:
$z_k = 4 \cdot (cos\frac{2}{5}k\pi + isin\frac{2}{5}k\pi), \quad$ dla $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

8.36.

$x^4 + 4 = 0$
$x^4 + 2^2 = 0$
$x^4 + [(\sqrt{2})^2]^2 = 0$
$x^4 + \sqrt{2}^4 = 0$
$x^4 = -(\sqrt{2}^4)$
Oznaczmy: $x = r(cos\alpha + isin\alpha), \quad r > 0$
Mamy: $[r(cos\alpha + isin\alpha)]^4 = -(\sqrt{2}^4)$
Stosujemy wzór Moivre'a:
$r^4(cos4\alpha + isin4\alpha) = -(\sqrt{2}^4)$
Zatem musi zachodzić:
$$\begin{cases} r^4 cos4\alpha = -(\sqrt{2}^4) \\ r^4 sin4\alpha = 0 \end{cases}$$
Podnieśmy oba równania do kwadratu i dodajmy stronami:
$(r^4cos4\alpha)^2 + (r^4sin4\alpha)^2 = (-\sqrt{2}^4)^2 + 0^2$
$(r^4)^2 \cdot (cos^2 4\alpha + sin^2 4\alpha) = (\sqrt{2}^4)^2$, bo $a^2 = (-a)^2$
$(r^4)^2 \cdot 1 = (\sqrt{2}^4)^2$
$r^4 = \sqrt{2}^4$, bo $r > 0$
$r = \sqrt{2}$
Układ równań przybiera więc postać:
$$\begin{cases} \sqrt{2}^4 cos4\alpha = -(\sqrt{2}^4) \\ \sqrt{2}^4 sin4\alpha = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} cos4\alpha = -1 \\ sin4\alpha = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 4\alpha = \pi + 2k\pi, \ \ k \in C \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{2}{4}k\pi, \ \ k \in C$$
Czyli:
$\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{4} \cdot 0 \cdot \pi = \frac{1}{4}\pi$

$\alpha_1 = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi$
$\alpha_2 = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{4} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{5}{4}\pi$
$\alpha_3 = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{4} \cdot 3 \cdot \pi = \frac{7}{4}\pi$
Dalej, dla $k > 3$ wartości argumentu α po odrzuceniu okresu 2π zaczynają się powtarzać. Zatem ostatecznie rozwiązaniem zadania są następujące liczby zespolone:
$z_k = \sqrt{2} \cdot [cos(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi) + isin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi)], \quad$ dla $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

8.37.
$x^6 - 1 = 0$
$x^6 = 1$
Oznaczmy: $x = r(cos\alpha + isin\alpha), \quad r > 0$
Mamy: $[r(cos\alpha + isin\alpha)]^6 = 1$
Stosujemy wzór Moivre'a:
$r^6(cos6\alpha + isin6\alpha) = 1$
Zatem musi zachodzić:
$\begin{cases} r^6 cos6\alpha = 1 \\ r^6 sin6\alpha = 0 \end{cases}$
Podnieśmy oba równania do kwadratu i dodajmy stronami:
$(r^6 cos6\alpha)^2 + (r^6 sin6\alpha)^2 = 1^2 + 0^2$
$(r^6)^2 \cdot (cos^2 6\alpha + sin^2 6\alpha) = 1$
$r^{12} \cdot 1 = 1$
$\Updownarrow\ r > 0$
$r = 1$
Układ równań przybiera więc postać:
$\begin{cases} 1 \cdot cos6\alpha = 1 \\ 1 \cdot sin6\alpha = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} cos6\alpha = 1 \\ sin6\alpha = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 6\alpha = 0 + 2k\pi,\ \ k \in C \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{6}k\pi = \frac{1}{3}k\pi,\ \ k \in C$
Czyli:
$\alpha_0 = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \pi = 0$
$\alpha_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{1}{3}\pi$
$\alpha_2 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{2}{3}\pi$
$\alpha_3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \pi = \frac{3}{3}\pi = \pi$
$\alpha_4 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi = \frac{4}{3}\pi$
$\alpha_5 = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \pi = \frac{5}{3}\pi$
Dalej, dla $k > 5$ wartości argumentu α po odrzuceniu okresu 2π zaczynają się powtarzać. Zatem ostatecznie rozwiązaniem zadania są następujące liczby zespolone:
$z_k = 1 \cdot [cos(\frac{1}{3}k\pi) + isin(\frac{1}{3}k\pi)] = cos(\frac{1}{3}k\pi) + isin(\frac{1}{3}k\pi), \quad$ dla $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

8.38.
$x^3 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 2^3 = 0$
Zastosujmy wzór: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$(x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) = 0$
$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$
$\Updownarrow$
$x = -2 \quad \vee \quad x^2 - 2x + 4 = 0$
Oznaczmy: $x = a + bi, \quad$ gdzie $a, b \in R$
Mamy: $(a + bi)^2 - 2 \cdot (a + bi) + 4 = 0$
$a^2 + 2abi + b^2 i^2 - 2a - 2bi + 4 = 0$
$(a^2 - b^2 - 2a + 4) + (2ab - 2b)i = 0$

$\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 4 = 0 & (1) \\ 2ab - 2b = 0 & (2) \end{cases}$

$2ab - 2b = 0$
$b(a - 1) = 0$
$\Updownarrow$
$b = 0 \ \ (3) \quad \vee \quad a = 1 \ \ (4)$
Podstawmy (3) do (1):
$a^2 - 0^2 - 2a + 4 = 0$

$a^2 - 2a + 4 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0$
Zatem w dla $b = 0$ nie mamy rozwiązań.

Podstawmy teraz (4) do (1):
$1^2 - b^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 0$
$1 - b^2 + 2 = 0$
$b^2 = 3$
$\Updownarrow$
$b = \sqrt{3} \quad \vee \quad b = -\sqrt{3}$
Zatem rozwiązaniami zadania są nastepujące liczby zespolone:
$x_1 = -2$
$x_2 = 1 + \sqrt{3}i$
$x_3 = 1 - \sqrt{3}i$

8.39.
$cos5x$
Stosując wzór Moivre'a mamy:
$(cosx + isinx)^5 = cos5x + isin5x \quad (1)$
Korzystając z wzorów na dwumian i symbol Newtona:
$(a+b)^2 = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mamy:
$(cosx+isinx)^5 = \binom{5}{0}cos^5x + \binom{5}{1}cos^4x \cdot isinx + \binom{5}{2}cos^3x \cdot i^2sin^2x + \binom{5}{3}cos^2x \cdot i^3sin^3x + \binom{5}{4}cosx \cdot i^4sin^4x + \binom{5}{5} \cdot i^5sin^5x =$
$= \frac{5!}{0! \cdot 5!}cos^5x + \frac{5!}{1! \cdot 4!}cos^4x \cdot isinx + \frac{5!}{2! \cdot 3!}cos^3x \cdot (-1) \cdot sin^2x + \frac{5!}{3! \cdot 2!}cos^2x \cdot (-i) \cdot sin^3x + \frac{5!}{4! \cdot 1!}cosx \cdot sin^4x + \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot isin^5x =$
$= cos^5x + 5cos^4x \cdot isinx - 10cos^3x \cdot sin^2x - 10cos^2x \cdot isin^3x + 5cosx \cdot sin^4x + isin^5x \quad (2)$
Uwzględniając (1) i (2) mamy:
$cos5x = Re[(2)] = cos^5x - 10cos^3x \cdot sin^2x + 5cosx \cdot sin^4x$

8.40.
$sin6x$
Stosując wzór Moivre'a mamy:
$(cosx + isinx)^6 = cos6x + isin6x \quad (1)$
Korzystając z wzorów na dwumian i symbol Newtona:
$(a+b)^2 = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mamy:
$(cosx + isinx)^6 = \binom{6}{0}cos^6x + \binom{6}{1}cos^5x \cdot isinx + \binom{6}{2}cos^4x \cdot i^2sin^2x + \binom{6}{3}cos^3x \cdot i^3sin^3x + \binom{6}{4}cos^2x \cdot i^4sin^4x + \binom{6}{5} \cdot$
$cosx \cdot i^5sin^5x +$
$+\binom{6}{6} \cdot i^6sin^6x = cos^6x + 6cos^5x \cdot isinx + \frac{6!}{2! \cdot 4!}cos^4x \cdot (-1) \cdot sin^2x + \frac{6!}{3! \cdot 3!}cos^3x \cdot (-i) \cdot sin^3x + \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot cos^2x \cdot 1 \cdot sin^4x + 6cosx \cdot isin^5x +$
$+(-1) \cdot sin^6x = cos^6x + 6cos^5x \cdot isinx - 15cos^4x \cdot sin^2x - 20cos^3x \cdot isin^3x + 15cos^2x \cdot sin^4x + 6cosx \cdot isin^5x - sin^6x \quad (2)$
Uwzględniając (1) i (2) mamy:
$sin6x = Im[(2)] = 6cos^5x \cdot sinx - 20cos^3x \cdot sin^3x + 6cosx \cdot sin^5x$

8.41.
$sin7x$
Stosując wzór Moivre'a mamy:
$(cosx + isinx)^7 = cos7x + isin7x \quad (1)$
Korzystając z wzorów na dwumian i symbol Newtona:
$(a+b)^2 = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mamy:
$(cosx + isinx)^7 = \binom{7}{0}cos^7x + \binom{7}{1}cos^6x \cdot isinx + \binom{7}{2}cos^5x \cdot i^2sin^2x + \binom{7}{3}cos^4x \cdot i^3sin^3x + \binom{7}{4}cos^3x \cdot i^4sin^4x + \binom{7}{5} \cdot$
$cos^2x \cdot i^5sin^5x+$
$+\binom{7}{6} \cdot cosx \cdot i^6sin^6x + \binom{7}{7} \cdot i^7sin^7x = cos^7x + 7cos^6x \cdot isinx + 21cos^5x \cdot (-1) \cdot sin^2x + 35cos^4x \cdot (-i) \cdot sin^3x + 35 \cdot cos^3x \cdot 1 \cdot sin^4x+$
$+21cos^2x \cdot isin^5x + 7cosx \cdot (-1) \cdot sin^6x + (-i) \cdot sin^7x = cos^7x + 7cos^6x \cdot isinx - 21cos^5x \cdot sin^2x - 35cos^4x \cdot i \cdot sin^3x+$
$+35 \cdot cos^3x \cdot sin^4x + 21cos^2x \cdot isin^5x - 7cosx \cdot sin^6x - i \cdot sin^7x \quad (2)$
Uwzględniając (1) i (2) mamy:
$sin7x = Im[(2)] = 7cos^6x \cdot sinx - 35cos^4x \cdot sin^3x + 21cos^2x \cdot sin^5x - sin^7x$

8.42.
$cos8x$
Stosując wzór Moivre'a mamy:
$(cosx + isinx)^8 = cos8x + isin8x \quad (1)$
Korzystając z wzorów na dwumian i symbol Newtona:
$(a + b)^2 = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mamy:
$(cosx + isinx)^8 = \binom{8}{0}cos^8x + \binom{8}{1}cos^7x \cdot isinx + \binom{8}{2}cos^6x \cdot i^2sin^2x + \binom{8}{3}cos^5x \cdot i^3sin^3x + \binom{8}{4}cos^4x \cdot i^4sin^4x + \binom{8}{5} \cdot$
$cos^3x \cdot i^5sin^5x+$
$+\binom{8}{6} \cdot cos^2x \cdot i^6sin^6x + \binom{8}{7} \cdot cosx \cdot i^7sin^7x + \binom{8}{8} \cdot i^8sin^8x = cos^8x + 8cos^7x \cdot i \cdot sinx - 28cos^6x \cdot sin^2x - 56cos^5x \cdot i \cdot sin^3x+$
$+70cos^4x \cdot sin^4x + 56cos^3x \cdot i \cdot sin^5x - 28cos^2x \cdot sin^6x - 8cosx \cdot i \cdot sin^7x + sin^8x \quad (2)$
Uwzględniając (1) i (2) mamy:
$cos8x = Re[(2)] = cos^8x - 28cos^6x \cdot sin^2x + 70cos^4x \cdot sin^4x - 28cos^2x \cdot sin^6x + sin^8x$

8.43.
$a). \ sinx + sin2x + \ldots + sinnx = \frac{sin[\frac{1}{2}(n+1)x] \cdot sin(\frac{1}{2}nx)}{sin\frac{1}{2}x}$
$b). \ cosx + cos2x + \ldots + cosnx = \frac{cos[\frac{1}{2}(n+1)x] \cdot sin(\frac{1}{2}nx)}{sin\frac{1}{2}x}$
Uwaga!
W treści zadania są dwie literówki:
$sin[\frac{1}{2}(n+1)]$ $zamiast$ $sin[\frac{1}{2}(n+1)x]$ oraz $cos[\frac{1}{2}(n+1)]$ $zamiast$ $cos[\frac{1}{2}(n+1)x]$
Weźmy pod uwagę nastepującą liczbę zespoloną:
$z = cosx + isinx$
Korzystając z wzoru Moivre'a obliczamy kolejne jej potęgi:
$z^2 = (cosx + isinx)^2 = cos2x + isin2x$
$z^3 = (cosx + isinx)^3 = cos3x + isin3x$
$\vdots$
$z^n = (cosx + isinx)^n = cosnx + isinnx$
Dodajmy teraz liczbę z i kolejne jej potęgi stronami:
$z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = cosx + cos2x + cos3x + \ldots cosnx + i \cdot (sinx + sin2x + sin3x + \ldots + sinnx)$
Lewa strona jest sumą n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym:
$a_1 = z \quad \wedge \quad q = z$
Zatem: $z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = S_n = z \cdot \frac{1-z^n}{1-z}$
$z \cdot \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{z-z^{n+1}}{1-z} = \frac{cosx+isinx-cos[(n+1)x]-isin[(n+1)x]}{1-cosx-isinx} = \frac{\{cosx+isinx-cos[(n+1)x]-isin[(n+1)x]\} \cdot [(1-cosx)+isinx]}{[(1-cosx)-isinx] \cdot [(1-cosx)+isinx]} =$
$\frac{\{cosx+isinx-cos[(n+1)x]-isin[(n+1)x]\} \cdot [1-cosx+isinx]}{(1-cosx)^2-(isinx)^2} = \frac{L}{M}$

$M = 1^2 - 2cosx + cos^2x - i^2 \cdot sin^2x = 1 - 2cosx + cos^2x + sin^2x = 2 - 2cosx = 2(1 - cosx) =$
$= (stosujemy\ wzór:\ 1 - cosx = 2sin^2\frac{1}{2}x) = 2 \cdot 2sin^2\frac{1}{2}x = 4sin^2\frac{1}{2}x$

W przekształceniach licznika stosujemy m.in. wzory: $1 - cosx = 2sin^2\frac{1}{2}x$ oraz $1 + cosx = 2cos^2\frac{1}{2}x$:
$L = cosx - cos^2x + isinxcosx + isinx - isinxcosx + i^2sin^2x - cos[(n+1)x] + cos[(n+1)x] \cdot cosx - cos[(n+1)x] \cdot isinx-$

$-isin[(n+1)x]+isin[(n+1)x]\cdot cosx-i^2sin[(n+1)x]\cdot sinx=cosx-cos^2x-sin^2x-cos[(n+1)x]+cos[(n+1)x]\cdot cosx+$
$+sin[(n+1)x]\cdot sinx+i\cdot\{sinxcosx+sinx-sinxcosx-cos[(n+1)x]\cdot sinx-sin[(n+1)x]+sin[(n+1)x]\cdot cosx\}=$
$=cosx-1-cos[(n+1)x]\cdot(1-cosx)+sin[(n+1)x]\cdot sinx+i\{sinx-cos[(n+1)x]\cdot sinx-sin[(n+1)x]\cdot(1-cosx)\}=$
$=-(1-cosx)-(1-cosx)\cdot cos[(n+1)x]+sin[(n+1)x]\cdot sinx+i\{sinx\cdot(1-cos[(n+1)x])-sin[(n+1)x]\cdot 2sin^2\frac{1}{2}x\}=$
$=-2sin^2\frac{1}{2}x-2sin^2\frac{1}{2}x\cdot cos[(n+1)x]+sin[(n+1)x]\cdot sinx+i\{sinx\cdot 2sin^2[\frac{1}{2}(n+1)x]-sin[(n+1)x]\cdot 2sin^2\frac{1}{2}x\}=$
$=-2sin^2\frac{1}{2}x\cdot(1+cos[(n+1)x]+sin[(n+1)x]\cdot sinx+i\{2sinx\cdot sin^2[\frac{1}{2}(n+1)x]-2sin[(n+1)x]\cdot sin^2\frac{1}{2}x\}=$
$=-2sin^2\frac{1}{2}x\cdot 2cos^2[\frac{1}{2}(n+1)x]+sin[(n+1)x]\cdot sinx+i\{2sinx\cdot sin^2[\frac{1}{2}(n+1)x]-2sin[(n+1)x]\cdot sin^2\frac{1}{2}x\}$

Zatem:
$a).\ sinx+sin2x+\ldots+sinnx=\frac{2sinx\cdot sin^2[\frac{1}{2}(n+1)x]-2sin[(n+1)x]\cdot sin^2\frac{1}{2}x}{4sin^2\frac{1}{2}x}=$ {Stosujemy wzór: $sin2x=2sinxcosx$}=
$=\frac{2\cdot 2sin\frac{1}{2}x\cdot cos\frac{1}{2}x\cdot sin^2[\frac{1}{2}(n+1)x]-2\cdot 2sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin^2\frac{1}{2}x}{4sin^2\frac{1}{2}x}=\frac{cos\frac{1}{2}x\cdot sin^2[\frac{1}{2}(n+1)x]-sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin\frac{1}{2}x}{sin\frac{1}{2}x}=$
$=\frac{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot\{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos\frac{1}{2}x-cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin\frac{1}{2}x\}}{sin\frac{1}{2}x}=$ {Stosujemy wzór: $sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$} =
$=\frac{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin[\frac{1}{2}(n+1)x-\frac{1}{2}x]}{sin\frac{1}{2}x}=\frac{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin(\frac{1}{2}nx)}{sin\frac{1}{2}x}$, co należało dowieść

$b).\ cosx+cos2x+\ldots+cosnx=\frac{-2sin^2\frac{1}{2}x\cdot 2cos^2[\frac{1}{2}(n+1)x]+sin[(n+1)x]\cdot sinx}{4sin^2\frac{1}{2}x}=$ {Stosujemy wzór: $sin2x=2sinxcosx$}=
$=\frac{-4sin^2\frac{1}{2}x\cdot cos^2[\frac{1}{2}(n+1)x]+2sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot 2sin\frac{1}{2}x\cdot cos\frac{1}{2}x}{4sin^2\frac{1}{2}x}=\frac{-4sin^2\frac{1}{2}x\cdot cos^2[\frac{1}{2}(n+1)x]+4sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin\frac{1}{2}x\cdot cos\frac{1}{2}x}{4sin^2\frac{1}{2}x}=$
$=\frac{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin\frac{1}{2}x\cdot cos\frac{1}{2}x-sin^2\frac{1}{2}x\cdot cos^2[\frac{1}{2}(n+1)x]}{sin^2\frac{1}{2}x}=\frac{sin\frac{1}{2}x\cdot\{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos\frac{1}{2}x-sin\frac{1}{2}x\cdot cos^2[\frac{1}{2}(n+1)x]\}}{sin^2\frac{1}{2}x}=$
$=\frac{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos\frac{1}{2}x-sin\frac{1}{2}x\cdot cos^2[\frac{1}{2}(n+1)x]}{sin\frac{1}{2}x}=\frac{cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot\{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos\frac{1}{2}x-sin\frac{1}{2}x\cdot cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\}}{sin\frac{1}{2}x}=$
$=\frac{cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot\{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos\frac{1}{2}x-cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin\frac{1}{2}x\}}{sin\frac{1}{2}x}=\frac{cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot\{sin[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot cos\frac{1}{2}x-cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin\frac{1}{2}x\}}{sin\frac{1}{2}x}=$
={Stosujemy wzór: $sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$} $=\frac{cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin[\frac{1}{2}(n+1)x-\frac{1}{2}x]}{sin\frac{1}{2}x}=$
$=\frac{cos[\frac{1}{2}(n+1)x]\cdot sin\frac{1}{2}nx}{sin\frac{1}{2}x}$, co należało dowieść