8.45.

$x^3 - 6x + 4 = 0$

Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby 4, a więc zawierają się wśród liczb:

$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$

Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:

$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1 + 4 = -1 \neq 0$, więc liczba 1 odpada

$f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1) + 4 = -1 + 6 + 4 > 0$, więc liczba -1 odpada

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$, więc liczba $x_1 = 2$ jest pierwiastkiem tego równania

Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania danego w zadaniu, wiedząc że $x - 2$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:

$x^3 - 6x + 4 = x^3 - 4x - 2x + 4 = x(x^2 - 4) - 2(x - 2) = x(x - 2)(x + 2) - 2(x - 2) =$

$= (x - 2)[x(x + 2) - 2] = (x - 2)(x^2 + 2x - 2)$

Znajdźmy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $y = x^2 + 2x - 2$:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$x_2 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2\cdot 1} = -1 - \sqrt{3}$

$x_3 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2\cdot 1} = -1 + \sqrt{3}$

Odp. Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są liczby $x_1 = 2$, $x_2 = -1 - \sqrt{3}$, $x_3 = -1 + \sqrt{3}$.

8.46.

$x^3 - 6x - 9 = 0$

Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby -9, a więc zawierają się wśród liczb:

$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9$

Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:

$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1 - 9 = 1 - 6 - 9 \neq 0$, więc liczba 1 odpada

$f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1) - 9 = -1 + 6 - 9 \neq 0$, więc liczba -1 odpada

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3 - 9 = 27 - 18 - 9 = 9 - 9 = 0$, więc liczba $x_1 = 3$ jest pierwiastkiem tego równania

Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania danego w zadaniu, wiedząc że $x - 3$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:

$x^3 - 6x - 9 = x^3 - 9x + 3x - 9 = x(x^2 - 9) + 3(x - 3) = x(x - 3)(x + 3) + 3(x - 3) =$

$= (x - 3)[x(x + 3) + 3] = (x - 3)(x^2 + 3x + 3)$

Znajdźmy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $y = x^2 + 3x + 3$:

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 < 0$

A zatem trójmian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych. Znajdźmy pierwiastki zespolone.

Podstawmy: $x = a + bi, \quad a, b \in R,\ b \neq 0$

$(a + bi)^2 + 3(a + bi) + 3 = 0$

$a^2 + 2abi - b^2 + 3a + 3bi + 3 = 0$

$(a^2 - b^2 + 3a + 3) + (2ab + 3b)i = 0$

Zatem musi zachodzić:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 3a + 3 = 0 & (1) \\ 2ab + 3b = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2): \quad b(2a + 3) = 0$

$\Updownarrow$

$b = 0 \quad \vee \quad 2a + 3 = 0$

$a = -\frac{3}{2}$

Pierwszy przypadek odrzucamy, ponieważ musi być $b \neq 0$. Zatem podstawmy $a = -\frac{3}{2}$ do (1):

$(-\frac{3}{2})^2 - b^2 + 3 \cdot (-\frac{3}{2}) + 3 = 0$

$\frac{9}{4} - b^2 - \frac{9}{2} + 3 = 0$

$b^2 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{12}{4}$

$b^2 = \frac{3}{4}$

$b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są więc liczby: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

8.47.

$x^3 + 18x - 19 = 0$

Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby -19, a więc zawierają się wśród liczb:

$\pm 1,\ \pm 19$

Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:

$f(1) = 1^3 + 18 \cdot 1 - 19 = 0$, więc liczba $x_1 = 1$ jest pierwiastkiem tego równania

Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania danego w zadaniu, wiedząc że $x - 1$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:

$x^3 + 18x - 19 = x^3 - x + 19x - 19 = x(x^2 - 1) + 19 \cdot (x - 1) = x(x-1)(x+1) + 19 \cdot (x - 1) =$
$(x - 1)[x(x + 1) + 19] = (x - 1)(x^2 + x + 19)$

Znajdźmy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $y = x^2 + x + 19$:

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 19 < 0$

A zatem trójmian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych. Znajdźmy pierwiastki zespolone.

Podstawmy: $x = a + bi, \quad a, b \in R,\ b \neq 0$

$(a + bi)^2 + (a + bi) + 19 = 0$

$a^2 + 2abi - b^2 + a + bi + 19 = 0$

$(a^2 - b^2 + a + 19) + (2ab + b)i = 0$

Zatem musi zachodzić:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + a + 19 = 0 & (1) \\ 2ab + b = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2): \quad b(2a + 1) = 0$

$\Updownarrow$

$b = 0 \quad \vee \quad 2a + 1 = 0$

$a = -\frac{1}{2}$

Pierwszy przypadek odrzucamy, ponieważ musi być $b \neq 0$. Zatem podstawmy $a = -\frac{1}{2}$ do (1):

$(-\frac{1}{2})^2 - b^2 - \frac{1}{2} + 19 = 0$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 19 = b^2$

$b^2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{76}{4}$

$b^2 = \frac{75}{4}$

$b = \frac{\sqrt{3 \cdot 25}}{2} \quad \vee \quad b = -\frac{\sqrt{3 \cdot 25}}{2}$

$b = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad b = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są więc liczby: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$, $x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

8.48.

$x^3 - 12x - 16 = 0$

Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby -16, a więc zawierają się wśród liczb:

$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8,\ \pm 16$

Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:

$f(1) = 1^3 - 12 \cdot 1 - 16 = -27 \neq 0$, więc liczba 1 odpada

$f(-1) = (-1)^3 - 12 \cdot (-1) - 16 < 0$, więc liczba -1 odpada

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 - 16 < 0$, więc liczba 2 odpada

$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) - 16 = -8 + 24 - 16 = 0$, więc liczba $x_1 = -2$ jest pierwiastkiem tego równania

Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania danego w zadaniu, wiedząc że $x - (-2) = x + 2$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:

$x^3 - 12x - 16 = x^3 - 4x - 8x - 16 = x(x^2 - 4) - 8 \cdot (x + 2) = x(x - 2)(x + 2) - 8 \cdot (x + 2) =$
$(x + 2)[x(x - 2) - 8] = (x + 2)(x^2 - 2x - 8)$

Znajdźmy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $y = x^2 - 2x - 8$:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

$x_2 = \frac{-(-2)-6}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$

$x_3 = \frac{-(-2)+6}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$

Odp. Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są liczby $x_1 = -2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

8.49.
$x^3 - 3x - 18 = 0$
Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby -18, a więc zawierają się wśród liczb:
$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 18$
Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:
$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 18 < 0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 18 < 0$, więc liczba -1 odpada
$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 18 < 0$, więc liczba 2 odpada
$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) - 18 < 0$, więc -2 odpada
$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 18 = 27 - 9 - 18 = 0$, więc liczba $x_1 = 3$ jest pierwiastkiem tego równania
Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania danego w zadaniu, wiedząc że $x - 3$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:
$x^3 - 3x - 18 = x^3 - 9x + 6x - 18 = x(x^2 - 9) + 6(x - 3) = x(x - 3)(x + 3) + 6(x - 3) =$
$= (x - 3)[x(x + 3) + 6] = (x - 3)(x^2 + 3x + 6)$
Znajdźmy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $y = x^2 + 3x + 6$:
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 9 - 24 < 0$
A zatem trójmian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych. Znajdźmy pierwiastki zespolone.
Podstawmy: $x = a + bi, \quad a, b \in R,\ b \neq 0$
$(a + bi)^2 + 3 \cdot (a + bi) + 6 = 0$
$a^2 + 2abi - b^2 + 3a + 3bi + 6 = 0$
$(a^2 - b^2 + 3a + 6) + (2ab + 3b)i = 0$
Zatem musi zachodzić:
$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 3a + 6 = 0 & (1) \\ 2ab + 3b = 0 & (2) \end{cases}$$
$(2): \quad b(2a + 3) = 0$
$\Updownarrow$
$b = 0 \quad \vee \quad 2a + 3 = 0$
$a = -\frac{3}{2}$
Pierwszy przypadek odrzucamy, ponieważ musi być $b \neq 0$. Zatem podstawmy $a = -\frac{3}{2}$ do (1):
$(-\frac{3}{2})^2 - b^2 + 3 \cdot (-\frac{3}{2}) + 6 = 0$
$\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 6 = b^2$
$b^2 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{24}{4}$
$b^2 = \frac{15}{4}$
$b = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \vee \quad b = -\frac{\sqrt{15}}{2}$
Odp. Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są więc liczby: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$, $x_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$

8.50.
$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0$
Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby 9, a więc zawierają się wśród liczb:
$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9$
Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:
$f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 9 > 0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 9 = -1 - 5 - 3 + 9$, więc liczba $x_1 = -1$ jest pierwiastkiem tego równania
Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania danego w zadaniu, wiedząc że $x - (-1) = x + 1$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:
$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = x^3 - 5x^2 - 6x + 9x + 9 = x(x^2 - 5x - 6) + 9(x + 1) = x(x^2 + x - 6x - 6) + 9(x + 1) =$
$= x[x(x + 1) - 6(x + 1)] + 9(x + 1) = x(x + 1)(x - 6) + 9(x + 1) = (x + 1)[x(x - 6) + 9] = (x + 1)(x^2 - 6x + 9)$
Znajdźmy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $y = x^2 - 6x + 9$:
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$
$x_2 = x_3 = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$
Odp. Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są liczby: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$.

8.51.
$x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0 \quad \leftarrow$Tu jest błąd w treści zadania. Żeby odpowiedzi się zgadzały, równanie powinno

wyglądać następująco:
$x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0 \quad (1)$
Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby -3, a więc zawierają się wśród liczb:
$\pm 1, \pm 3$
Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:
$f(1) = 1^5 - 3 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 1 - 3 = 1 - 3 + 2 - 6 + 1 - 3 < 0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 1 - 3 = -1 - 3 - 2 - 6 - 1 - 3 < 0$, więc liczba -1 odpada
$f(3) = 3^5 - 3 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 3^5 - 3^5 + 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^3 + 0 = 0$, więc liczba $x_1 = 3$ jest pierwiastkiem tego równania.
Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania danego w zadaniu, wiedząc że $x - 3$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:
$x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = x^4(x-3) + 2x^2(x-3) + (x-3) = (x-3)(x^4 + 2x^2 + 1) = (x-3)(x^2+1)^2$
Zauważmy, że:
$x^2 + 1 = 0$
$\Updownarrow$
$x^2 = -1$
$\Updownarrow$
$x = i \quad \vee \quad x = -i$
Oba pierwiastki zespolone są podwójne, gdyż czynnik $x^2 + 1$ jest podniesiony do kwadratu.
Odp. Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są liczby:
$x_1 = 3$, $x_2 = i$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$, $x_5 = -i$

8.52.
$x^4 - 10x^2 - 20x - 16 = 0$
Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby -16, a więc zawierają się wśród liczb:
$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$
Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:
$f(1) = 1^4 - 10 \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 - 16 < 0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^2 - 20 \cdot (-1) - 16 = 1 - 10 + 20 - 16 < 0$, więc liczba -1 odpada
$f(2) = 2^4 - 10 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 - 16 = 16 - 40 - 40 - 16 < 0$, więc liczba 2 odpada
$f(-2) = (-2)^4 - 10 \cdot (-2)^2 - 20 \cdot (-2) - 16 = 16 - 40 + 40 - 16 = 0$, więc liczba $x_1 = -2$ jest pierwiastkiem tego równania.
Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania danego w zadaniu, wiedząc że $x - (-2) = x + 2$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:
$x^4 - 10x^2 - 20x - 16 = x^4 - 10x^2 - 12x - (8x + 16) = x^4 - 4x^2 - (6x^2 + 12x) - 8(x+2) = x^2(x^2 - 4) - 6x(x+2) - 8(x+2) =$
$= x^2(x-2)(x+2) - 6x(x+2) - 8(x+2) = (x+2)[x^2(x-2) - 6x - 8] = (x+2)(x^3 - 2x^2 - 6x - 8) \quad (1)$
Rozważmy teraz wielomian trzeciego stopnia w nawiasie:
$x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0 \quad (2)$
Jeśli ma on pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby -8, a więc zawierają się wśród liczb:
$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
Sprawdźmy, która z nich spełnia równanie (2):
$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 8 = 1 - 2 - 6 - 8 < 0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 8 = -1 - 2 + 6 - 8 < 0$, więc liczba -1 odpada
$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 8 = 8 - 8 - 12 - 8 < 0$, więc liczba 2 odpada
$f(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 8 = -8 - 8 + 12 - 8 < 0$, więc liczba -2 odpada
$f(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 8 = 64 - 32 - 24 - 8 = 32 - 32 = 0$, więc liczba $x_2 = 4$ jest pierwiastkiem równania (2) a tym samym równania danego w zadaniu.
Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania (2), wiedząc że $x - 4$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:
$x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = x^3 - 2x^2 - 8x + 2x - 8 = x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x + 2x - 8 = x^2(x-4) + 2x(x-4) + 2(x-4) =$
$= (x-4)(x^2 + 2x + 2)$
Zatem równanie (2) możemy zapisać następująco:
$(x-4)(x^2 + 2x + 2) = 0$
oraz (1):
$(x+2)(x^3 - 2x^2 - 6x - 8) = (x+2)(x-4)(x^2 + 2x + 2)$
Znajdźmy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego: $y = x^2 + 2x + 2$
$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$

Zatem powyższy trójmian nie ma pierwiastków rzeczywistych. Znajdźmy rozwiązania zespolone. W tym celu podstawmy: $x = a + bi, \quad a, b \in R,\ b \neq 0$

$(a + bi)^2 + 2 \cdot (a + bi) + 2 = 0$

$a^2 + 2abi - b^2 + 2a + 2bi + 2 = 0$

$(a^2 - b^2 + 2a + 2) + (2ab + 2b)i = 0$

Zatem musi zachodzić:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a + 2 = 0 & (3) \\ 2ab + 2b = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (4): \quad 2b(a+1) = 0 \\ \qquad\qquad \Updownarrow \\ b = 0 \quad \vee \quad a + 1 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad a = -1 \end{array}$$

Pierwszy przypadek odrzucamy, ponieważ musi być $b \neq 0$. Zatem podstawmy $a = -1$ do (3):

$(-1)^2 - b^2 + 2 \cdot (-1) + 2 = 0$

$1 - 2 + 2 = b^2$

$b^2 = 1$

$\Updownarrow$

$b = 1 \quad \vee \quad b = -1$

$\Downarrow$

$x_3 = -1 - i \quad \wedge \quad x_4 = -1 + i$

Odp. Ostatecznie rozwiązaniami równania danego w zadaniu są liczby:

$x_1 = -2,\ x_2 = 4,\ x_3 = -1 - i,\ x_4 = -1 + i$

8.53.

$x^6 + 9x^4 - 16x^2 - 144 = 0$

$x^4(x^2 + 9) - 16(x^2 + 9) = 0$

$(x^2 + 9)(x^4 - 16) = 0$

$(x^2 + 9)(x^4 - 2^4) = 0$

$(x^2 + 9)[(x^2)^2 - (2^2)^2] = 0$

$(x^2 + 9)(x^2 - 2^2)(x^2 + 2^2) = 0$

$(x^2 + 9)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) = 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{array}{lcl} x^2 + 9 = 0 & \vee & x^2 + 4 = 0 \\ x^2 = -3^2 & & x^2 = -4^2 \\ x = -3i \quad \vee \quad x = 3i & & x = -2i \quad \vee \quad x = 2i \end{array}$$

Odp. Zatem rozwiązaniami równania danego w wzadaniu są liczby:

$x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2i,\ x_4 = 2i,\ x_5 = -3i,\ x_6 = 3i$

8.54.

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby 24, a więc zawierają się wśród liczb:

$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 24$

Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:

$f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 24 = 1 - 5 - 2 + 24 > 0$, więc liczba 1 odpada

$f(-1) = (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 24 = -1 - 5 + 2 + 24 > 0$, więc liczba -1 odpada

$f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 24 = 8 - 20 - 4 + 24 > 0$, więc liczba 2 odpada

$f(-2) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 24 = -8 - 20 + 4 + 24 = 0$, więc liczba $x_1 = -2$ jest pierwiastkiem równania danego w zadaniu.

Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie tego równania, wiedząc że $x - (-2) = x + 2$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = x^3 - 5x^2 - 2x - 12x + 12x + 24 = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 5x^2 - 2x - 12x + 12(x + 2) =$

$= x^2(x + 2) - 2x^2 - 4x - 5x^2 - 10x + 12(x + 2) = x^2(x + 2) - 2x(x + 2) - 5x(x + 2) + 12(x + 2) =$

$= (x + 2)(x^2 - 2x - 5x + 12) = (x + 2)(x^2 - 7x + 12)$

Znajdźmy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $y = x^2 - 7x + 12$:

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 + 48 = 1$

$\sqrt{\Delta} = 1$
$x_2 = \frac{-(-7)-1}{2\cdot 1} \quad \vee \quad x_3 = \frac{-(-7)+1}{2\cdot 1}$
$x_2 = \frac{7-1}{2} \quad \vee \quad x_3 = \frac{7+1}{2}$
$x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 4$
Odp. Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są liczby $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

8.55.
$4x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$
$4x^2(x-1) + (x-1) = 0$
$(x-1)(4x^2+1) = 0$
$\Updownarrow$
$x_1 = 1 \quad \vee \quad 4x^2 + 1 = 0$
$4x^2 = -1$
$x^2 = -\frac{1}{4}$
$\Updownarrow$
$x_2 = -\frac{1}{2}i \quad \vee \quad x_3 = \frac{1}{2}i$
Odp. Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są liczby: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}i$, $x_3 = \frac{1}{2}i$.

8.56.
$x^3 - 6x - 4 = 0$
Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby -4, a więc zawierają się wśród liczb:
$\pm 1, \pm 2, \pm 4$
Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:
$f(1) = 1^3 - 6\cdot 1 - 4 = 1 - 6 - 4 < 0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^3 - 6\cdot(-1) - 4 = -1 + 6 - 4 = 1$, więc liczba -1 odpada
$f(2) = 2^3 - 6\cdot 2 - 4 = 8 - 12 - 4 < 0$, więc liczba 2 odpada
$f(-2) = (-2)^3 - 6\cdot(-2) - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$, więc liczba $x_1 = -2$ jest rozwiązaniem równania danego w zadaniu.
Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie tego równania, wiedząc że $x - (-2) = x + 2$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:
$x^3 - 6x - 4 = x^3 - 4x - 2x - 4 = x(x^2-4) - 2(x+2) = x(x-2)(x+2) - 2(x+2) = (x+2)[x(x-2)-2] =$
$= (x+2)(x^2 - 2x - 2)$
Znajdźmy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $y = x^2 - 2x - 2$:
$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 4 + 8 = 12$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$x_2 = \frac{-(-2)-2\sqrt{3}}{2\cdot 1} \quad \vee \quad x_3 = \frac{-(-2)+2\sqrt{3}}{2\cdot 1}$
$x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad x_3 = \frac{2+2\sqrt{3}}{2}$
$x_2 = 1 - \sqrt{3} \quad \vee \quad x_3 = 1 + \sqrt{3}$

Odp. Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są liczby: $x_1 = -2$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$.

8.57.
$6x^4 - 83x^3 + 272x^2 + 76x - 96 = 0 \qquad (1)$
Podstawmy $x = \frac{y}{6}$
$6\cdot(\frac{y}{6})^4 - 83\cdot(\frac{y}{6})^3 + 272\cdot(\frac{y}{6})^2 + 76\cdot\frac{y}{6} - 96 = 0$
Pomnóżmy powyższe równanie stronami przez 6^3:
$6\cdot 6^3\cdot(\frac{y}{6})^4 - 83\cdot 6^3\cdot(\frac{y}{6})^3 + 272\cdot 6^3\cdot(\frac{y}{6})^2 + 76\cdot 6^3\cdot\frac{y}{6} - 96\cdot 6^3 = 0$
$y^4 - 83y^3 + 272\cdot 6y^2 + 76\cdot 6^2\cdot y - 20736 = 0$
$y^4 - 83y^3 + 1632y^2 + 2736y - 20736 = 0 \qquad (2)$
Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby -20736, a więc zawierają się wśród liczb:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24, \pm 32, \pm 48, \pm 96, ...$
Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:

$f(1) = 1^4 - 83 \cdot 1^3 + 1632 \cdot 1^2 + 2736 \cdot 1 - 20736 < 0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^4 - 83 \cdot (-1)^3 + 1632 \cdot (-1)^2 + 2736 \cdot (-1) - 20736 = 1 + 83 + 1632 - 2736 - 20736 < 0$, więc liczba -1 odpada
$f(2) = 2^4 - 83 \cdot 2^3 + 1632 \cdot 2^2 + 2736 \cdot 2 - 20736 = 16 - 664 + 6528 + 5472 - 20736 < 0$, więc liczba 2 odpada
$f(-2) = (-2)^4 - 83 \cdot (-2)^3 + 1632 \cdot (-2)^2 + 2736 \cdot (-2) - 20736 = 16 + 664 + 6528 - 5472 - 20736 < 0$, więc liczba -2 odpada
$f(3) = 3^4 - 83 \cdot 3^3 + 1632 \cdot 3^2 + 2736 \cdot 3 - 20736 = 81 - 2241 + 14688 + 8208 - 20736 = 0$, więc liczba $y_1 = 3$ jest rozwiązaniem równania (2) a tym samym $x_1 = \frac{1}{6} \cdot y_1 = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem równania (1) danego w zadaniu.
Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania (2), wiedząc że $y - 3$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:
$y^4 - 83y^3 + 1632y^2 + 2736y - 20736 = y^4 - 3y^3 - 80y^3 + 240y^2 + 1392y^2 - 4176y + 4176y + 2736y - 20736 =$
$= y^3(y-3) - 80y^2(y-3) + 1392y(y-3) + 6912y - 20736 = y^3(y-3) - 80y^2(y-3) + 1392y(y-3) + 6912(y-3) =$
$= (y-3)(y^3 - 80y^2 + 1392y + 6912)$
Rozważmy teraz równanie: $y^3 - 80y^2 + 1392y + 6912 = 0 \quad (3)$
Jeśli ma ono pierwiastki wymierne, to zgodnie z tw. 8.2.4 są one dzielnikami liczby 6192, a więc zawierają się wśród liczb:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, ...$
Sprawdźmy, która z nich spełnia to równanie:
$g(1) = 1^3 - 80 \cdot 1^2 + 1392 \cdot 1 + 6912 > 0$, więc liczba 1 odpada
$g(-1) = (-1)^3 - 80 \cdot (-1)^2 + 1392 \cdot (-1) + 6912 = 1 - 80 - 1392 + 6912 > 0$, więc liczba -1 odpada
$g(2) = 2^3 - 80 \cdot 2^2 + 1392 \cdot 2 + 6912 = 8 - 320 + 2784 + 6912 > 0$, więc liczba 2 odpada
$g(-2) = (-2)^3 - 80 \cdot (-2)^2 + 1392 \cdot (-2) + 6912 = -8 - 320 - 2784 + 6912 > 0$, więc liczba -2 odpada
$g(3) = 3^3 - 80 \cdot 3^2 + 1392 \cdot 3 + 6912 = 27 - 720 + 4176 + 6912 > 0$, więc liczba 3 odpada
$g(-3) = (-3)^3 - 80 \cdot (-3)^2 + 1392 \cdot (-3) + 6912 = -27 - 720 - 4176 + 6912 > 0$, więc liczba -3 odpada
$g(4) = 4^3 - 80 \cdot 4^2 + 1392 \cdot 4 + 6912 = 64 - 1280 + 5568 + 6912 > 0$, więc liczba 4 odpada
$g(-4) = (-4)^3 - 80 \cdot (-4)^2 + 1392 \cdot (-4) + 6912 = -64 - 1280 - 5568 + 6912 = 0$, więc liczba $y_2 = -4$ jest rozwiązaniem równania (3) a tym samym $x_2 = \frac{1}{6} \cdot y_2 = \frac{1}{6} \cdot (-4) = -\frac{2}{3}$ jest rozwiązaniem równania (1) danego w zadaniu.
Przekształćmy teraz wielomian po lewej stronie równania (3), wiedząc że $y - (-4) = y + 4$ jest jego czynnikiem nierozkładalnym:
$y^3 - 80y^2 + 1392y + 6912 = y^3 + 4y^2 - 4y^2 - 80y^2 - 336y + 336y + 1392y + 6912 = y^2(y+4) - 84y^2 - 336y +$
$+1728y + 6912 = y^2(y+4) - 84y(y+4) + 1728(y+4) = (y+4)(y^2 - 84y + 1728)$
Rozważmy teraz trójmian kwadratowy: $h(y) = y^2 - 84y + 1728$
$\Delta = (-84)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1728 = 7056 - 6912 = 144$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{144} = 12$
$y_3 = \frac{84-12}{2 \cdot 1} = \frac{72}{2} = 36 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{6} \cdot y_3 = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6$
$y_4 = \frac{84+12}{2 \cdot 1} = \frac{96}{2} = 48 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{1}{6} \cdot y_4 = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8$

Odp. Rozwiązaniami równania danego w zadaniu są liczby: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = 6$, $x_4 = 8$.