8.64.
$x^3 - 12x + 8 = 0$
Ponieważ wszystkie współczynniki tego równania są liczbami całkowitymi, więc najpierw sprawdzamy czy rozwiązaniem nie jest któryś z dzielników wyrazu wolnego a więc:
$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
Sprawdzamy te liczby:
$f(1) = 1^3 - 12 \cdot 1 + 8 = -3 - 3$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^3 - 12 \cdot (-1) + 8 = -1 + 12 + 8 > 0$, więc liczba -1 odpada
$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 8 = 8 - 24 + 8 = 16 - 24 < 0$, więc liczba 2 odpada
$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 8 = -8 + 24 + 8 = 24$, więc liczba -2 odpada
$f(4) = 4^3 - 12 \cdot 4 + 8 = 64 + 8 - 48 > 0$, więc liczba 4 odpada
$f(-4) = (-4)^3 - 12 \cdot (-4) + 8 = -64 + 8 + 48 = -56 + 48 < 0$, więc liczba -4 odpada
$f(8) = 8^3 - 12 \cdot 8 + 8 = 8 \cdot (64 - 12 + 1) > 0$, więc liczba 8 odpada
$f(-8) = (-8)^3 - 12 \cdot (-8) + 8 = 8 \cdot (-64 + 12 + 8) < 0$, więc liczba -8 odpada

Rozwiązania nie znaleźliśmy, obliczmy więc wyróżnik tego równania:
$\Delta = [\frac{1}{3} \cdot (-12)]^3 + (\frac{1}{2} \cdot 8)^2 = (-4)^3 + 4^2 = 16 - 64 = -48$
A więc na podstawie wzoru 8.3.9 mamy:
$x_{k+1} = 2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3} \cdot (-12)} \cdot cos[\frac{1}{3} \cdot (\alpha + 2k\pi)]$, dla $k = 0, 1, 2$
gdzie α wyznaczamy ze związku:
$cso\alpha = \frac{3 \cdot 8}{2 \cdot (-12) \cdot \sqrt{-\frac{1}{3} \cdot (-12)}} = \frac{24}{-24 \cdot \sqrt{4}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
Zatem:
$x_1 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3} \cdot (-12)} \cdot cos(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\pi) = 2 \cdot \sqrt{4} \cdot cos\frac{2}{9}\pi = 4cos\frac{2}{9}\pi$
$x_2 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3} \cdot (-12)} \cdot cos[\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3}\pi + 2\pi)] = 2 \cdot \sqrt{4} \cdot cos(\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3}\pi) = 4cos\frac{8}{9}\pi$
$x_3 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3} \cdot (-12)} \cdot cos[\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3}\pi + 4\pi)] = 2 \cdot \sqrt{4} \cdot cos(\frac{1}{3} \cdot \frac{14}{3}\pi) = 4cos\frac{14}{9}\pi$

8.65.
$x^3 + 3x - 2 = 0$
Ponieważ wszystkie współczynniki tego równania są liczbami całkowitymi, więc najpierw sprawdzamy czy rozwiązaniem nie jest któryś z dzielników wyrazu wolnego a więc:
$\pm 1, \pm 2$
Sprawdzamy te liczby:
$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 - 2 = 1 + 3 - 2 = 2$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 2 = -1 - 3 - 2 < 0$, więc liczba -1 odpada
$f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = 8 + 6 - 2 > 0$, więc liczba 2 odpada
$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) - 2 = -8 - 6 - 2 < 0$, więc liczba -2 odpada

Rozwiązania nie znaleźliśmy, obliczmy więc wyróżnik tego równania:
$\Delta = (\frac{1}{3} \cdot 3)^3 + [\frac{1}{2} \cdot (-2)]^2 = 1 + (-1)^2 = 2$
Następnie obliczmy wyrażenia (gdzie $p = 3$, $q = -2$):
$U = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2} \cdot (-2) - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$
$V = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$
$u = Re\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$
$v = Re\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$
$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (-1 - i\sqrt{3}), \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \cdot (-1 + i\sqrt{3})$
Zatem rozwiązania równania danego w zadaniu są następujące:
$x_1 = u + v = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$
$x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v = \frac{1}{2} \cdot (-1 - i\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot (-1 + i\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$
$x_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v = \frac{1}{2} \cdot (-1 + i\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot (-1 - i\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$

8.66.
$x^3 - 71x + 219 = 0$
Ponieważ wszystkie współczynniki tego równania są liczbami całkowitymi, więc najpierw sprawdzamy czy rozwiązaniem nie jest któryś z dzielników wyrazu wolnego a więc:

$\pm1, \pm3, \pm73, \pm219$
Sprawdzamy te liczby:
$f(1) = 1^3 - 71 \cdot 1 + 219 > 0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^3 - 71 \cdot (-1) + 219 > 0$, więc liczba -1 odpada
$f(3) = 3^3 - 71 \cdot 3 + 219 = 27 - 213 + 219 > 0$, więc liczba 3 odpada
$f(-3) = (-3)^3 - 71 \cdot (-3) + 219 = -27 + 213 + 219 > 0$, więc liczba -3 odpada
$f(73) = 73^3 - 71 \cdot 73 + 219 = 73^2 \cdot 73 - 71 \cdot 73 + 219 > 0$, więc liczba 73 odpada
$f(-73) = (-73)^3 - 71 \cdot (-73) + 219 = -73^2 \cdot 73 + 71 \cdot 73 + 219 < 0$, więc liczba -73 odpada
$f(219) = 219^3 - 71 \cdot 219 + 219 > 0$, więc liczba 219 odpada
$f(-219) = (-219)^3 - 71 \cdot (-219) + 219 = -219^2 \cdot 219 + 71 \cdot 219 + 219 < 0$, więc liczba -219 odpada

Rozwiązania nie znaleźliśmy, obliczmy więc wyróżnik tego równania:
$\Delta = [\frac{1}{3} \cdot (-71)]^3 + (\frac{1}{2} \cdot 219)^2 = \frac{1}{27} \cdot (-357911) + \frac{1}{4} \cdot 47961 \approx -13255,963 + 11990,25 < 0$
Zatem na podstawie wzoru 8.3.9 mamy:
$x_{k+1} = 2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3} \cdot (-71)} \cdot cos[\frac{1}{3} \cdot (\alpha + 2k\pi)], \quad k = 0, 1, 2$
gdzie α wyznaczamy ze wzoru:
$cos\alpha = \frac{3 \cdot 219}{2 \cdot (-71) \cdot \sqrt{-\frac{1}{3} \cdot (-71)}} \approx \frac{657}{-142 \cdot \sqrt{23,67}} \approx \frac{657}{-142 \cdot 4,87} = -\frac{657}{691,54} \approx -0,95 \Rightarrow \alpha \approx 180° - 72° = 108° = 108° \cdot \frac{\pi}{180°} = 0,6\pi$
Zatem:
$x_{k+1} = 2 \cdot \sqrt{\frac{71}{3}} \cdot cos[\frac{1}{3} \cdot (0,6\pi + 2k\pi)], \quad k = 0, 1, 2$
$x_{k+1} = 2 \cdot \sqrt{\frac{71}{3}} \cdot cos(\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}\pi + \frac{2}{3}k\pi)], \quad k = 0, 1, 2$
$x_{k+1} = 2 \cdot \sqrt{\frac{71}{3}} \cdot cos(\frac{2}{10}\pi + \frac{2}{3}k\pi)], \quad k = 0, 1, 2$
$x_{k+1} = 2 \cdot \sqrt{\frac{71}{3}} \cdot cos(\frac{1}{5}\pi + \frac{2}{3}k\pi)], \quad k = 0, 1, 2$

8.67.
$x^3 - 9x - 6\sqrt{3} = 0$
Ponieważ nie wszystkie współczynniki tego równania są liczbami całkowitymi, więc przystąpmy od razu do obliczenia jego wyróżnika:
$\Delta = [\frac{1}{3} \cdot (-9)]^3 + [\frac{1}{2} \cdot (-6\sqrt{3})]^2 = (-3)^3 + \frac{1}{4} \cdot 36 \cdot 3 = -27 + 9 \cdot 3 = 0$
Zatem równanie dane w zadaniu ma następujące rozwiązania:
$x_1 = x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot (-6\sqrt{3})} = \sqrt[3]{-3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{-(\sqrt{3})^3} = -\sqrt{3}$
$x_3 = -2x_1 = -2 \cdot (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

8.68.
$x^3 + 6x + 4 = 0$
Ponieważ wszystkie współczynniki tego równania są liczbami całkowitymi, więc najpierw sprawdzamy czy rozwiązaniem nie jest któryś z dzielników wyrazu wolnego a więc:
$\pm1, \pm2, \pm4$
Sprawdzamy te liczby:
$f(1) = 1^3 + 6 \cdot 1 + 4 = 11 \neq 0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1) = (-1)^3 + 6 \cdot (-1) + 4 = -1 - 6 + 4 = -3 \neq 0$, więc liczba -1 odpada
$f(2) = 2^3 + 6 \cdot 2 + 4 = 8 + 12 + 4 = 24 \neq 0$, więc liczba 2 odpada
$f(-2) = (-2)^3 + 6 \cdot (-2) + 4 = -8 - 12 + 4 = -16 \neq 0$, więc liczba -2 odpada
$f(4) = 4^3 + 6 \cdot 4 + 4 > 0$, więc liczba 4 odpada
$f(-4) = (-4)^3 + 6 \cdot (-4) + 4 = -64 - 24 + 4 < 0$, więc liczba -4 odpada

Rozwiązania nie znaleźliśmy, obliczmy więc wyróżnik tego równania:
$\Delta = (\frac{1}{3} \cdot 6)^3 + (\frac{1}{2} \cdot 4)^2 = 2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
Następnie obliczmy wyrażenia (gdzie $q = 4$):
$U = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2} \cdot 4 - 2\sqrt{3} = -2 - 2\sqrt{3}$
$V = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 2\sqrt{3} = -2 + 2\sqrt{3}$
$u = Re\sqrt[3]{U} = \sqrt[3]{-2 - 2\sqrt{3}}$
$v = Re\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{-2 + 2\sqrt{3}}$

$\varepsilon=\frac{1}{2}\cdot(-1-i\sqrt{3}),\quad \varepsilon^2=\frac{1}{2}\cdot(-1+i\sqrt{3})$
Zatem rozwiązania równania danego w zadaniu są następujące:
$x_1=u+v=\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}}$
$x_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v=\frac{1}{2}\cdot(-1-i\sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\cdot(-1+i\sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}i-$
$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}}i=-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}})-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}})i$
$x_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v=\frac{1}{2}\cdot(-1+i\sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\cdot(-1-i\sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}i-$
$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}}i=-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}})+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}}-\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}})i$

8.69.
$x^3-588x-2744=0$
Zgodnie ze wskazówką do zadania zauważmy, że $588=3\cdot 14^2$ oraz $2744=14^3$. Nasze równanie przybiera więc postać:
$x^3-3\cdot 14^2\cdot x-14^3=0$
Ponieważ wszystkie współczynniki tego równania są liczbami całkowitymi, więc najpierw sprawdzamy czy rozwiązaniem nie jest któryś z wymienionych poniżej dzielników wyrazu wolnego:
$\pm 1,\pm 2,\pm 7,\pm 14$
Jeżeli wyraz wolny nie jest podzielny przez żadną z powyższych liczb, nie dzieli się też przez żadną inną (związaną z podniesieniem liczby 14 do 3-ciej potęgi).
$f(1)=1^3-3\cdot 14^2\cdot 1-14^3=1-3\cdot 14^2-14\cdot 14^2<0$, więc liczba 1 odpada
$f(-1)=(-1)^3-3\cdot 14^2\cdot(-1)-14^3=-1+3\cdot 14^2-14\cdot 14^2<0$, więc liczba -1 odpada
$f(2)=2^3-3\cdot 14^2\cdot 2-14^3<0$, więc liczba 2 odpada
$f(-2)=(-2)^3-3\cdot 14^2\cdot(-2)-14^3=-8+6\cdot 14^2-14\cdot 14^2<0$, więc liczba -2 odpada
$f(7)=7^3-3\cdot 14^2\cdot 7-14^3<0$, więc liczba 7 odpada
$f(-7)=(-7)^3-3\cdot 14^2\cdot(-7)-14^3=-7\cdot(-7)^2+21\cdot 14^2-14\cdot 14^2=-7\cdot 7^2+7\cdot 14^2>0$, więc liczba -7 odpada
$f(14)=14^3-3\cdot 14^2\cdot 14-14^3<0$, więc liczba 14 odpada
$f(-14)=(-14)^3-3\cdot 14^2\cdot(-14)-14^3=(-14)^3+3\cdot 14^3-14^3=14^3>0$, więc liczba -14 odpada
Rozwiązania nie znaleźliśmy, obliczmy więc wyróżnik tego równania:
$\Delta=[\frac{1}{3}\cdot(-3\cdot 14^2)]^3+[\frac{1}{2}\cdot(-14^3)]^2=(-14^2)^3+\frac{1}{4}\cdot[(-14^3)]^2=-14^6+\frac{1}{4}\cdot 14^6=-\frac{3}{4}\cdot 14^6<0$
Zatem na podstawie wzoru 8.3.9 mamy:
$x_{k+1}=2\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}\cdot(-3\cdot 14^2)}\cdot cos[\frac{1}{3}\cdot(\alpha+2k\pi)]=2\cdot\sqrt{14^2}\cdot cos[\frac{1}{3}\cdot(\alpha+2k\pi)]=28\cdot cos[\frac{1}{3}\cdot(\alpha+2k\pi)]$, dla $k=0,1,2$
gdzie α wyznaczamy ze związku:
$cos\alpha=\frac{3\cdot(-14^3)}{2\cdot(-3\cdot 14^2)\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}\cdot(-3\cdot 14^2)}}=\frac{-3\cdot 14^3}{-6\cdot 14^2\cdot\sqrt{14^2}}=\frac{3\cdot 14^3}{6\cdot 14^2\cdot 14}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{3}$
Zatem:
$x_1=28\cdot cos(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3})=28\cdot cos\frac{\pi}{9}$
$x_2=28\cdot cos[\frac{1}{3}\cdot(\frac{\pi}{3}+2\pi)]=28\cdot cos(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi)=28\cdot cos(\frac{7}{9}\pi)$
$x_3=28\cdot cos[\frac{1}{3}\cdot(\frac{\pi}{3}+4\pi)]=28\cdot cos(\frac{\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi)=28\cdot cos(\frac{13}{9}\pi)$

8.70.
$x^3-5x+6\sqrt{2}=0$
Ponieważ nie wszystkie współczynniki tego równania są liczbami całkowitymi, więc od razu przystępujemy do obliczenia jego wyróżnika:
$\Delta=[\frac{1}{3}\cdot(-5)]^3+(\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2})^2=(-\frac{5}{3})^3+(3\sqrt{2})^2=-\frac{125}{27}+9\cdot 2=18-\frac{125}{27}=\frac{486}{27}-\frac{125}{27}=\frac{361}{27}$
$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{361}{27}}=\frac{19}{\sqrt{27}}=\frac{19}{\sqrt{9\cdot 3}}=\frac{19}{3\sqrt{3}}$
Następnie obliczmy wyrażenia:
$U=-\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}-\frac{19}{3\sqrt{3}}=-3\sqrt{2}-\frac{19}{3\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}-\frac{19}{3\sqrt{3}}=\frac{-9\sqrt{6}-19}{3\sqrt{3}}=\frac{-9\sqrt{6}-19}{\sqrt{3}^3}$
$V=-\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}+\frac{19}{3\sqrt{3}}=-3\sqrt{2}+\frac{19}{3\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}+\frac{19}{3\sqrt{3}}=\frac{-9\sqrt{6}+19}{3\sqrt{3}}=\frac{-9\sqrt{6}+19}{\sqrt{3}^3}$
$u=Re\sqrt[3]{U}=\sqrt[3]{\frac{-9\sqrt{6}-19}{\sqrt{3}^3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{-9\sqrt{6}-19}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt[3]{(-1)^3\cdot(9\sqrt{6}+19)}=-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{19+9\sqrt{6}}$
$v=Re\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{\frac{-9\sqrt{6}+19}{\sqrt{3}^3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{-9\sqrt{6}+19}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{19-9\sqrt{6}}$
Policzmy jeszcze oba powyższe pierwiastki sześcienne:
$\begin{cases}19+9\sqrt{6}=(a+b)^3 & (1)\\ 19-9\sqrt{6}=(a-b)^3 & (2)\end{cases}$, gdzie $a,b\in R\ \wedge\ a\neq 0\ \wedge\ b\neq 0$

$$\begin{cases} 19+9\sqrt{6} = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ 19-9\sqrt{6} = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{cases}$$

Dodajmy oba równania układu stronami:
$38 = 2a^3 + 6ab^2$

Odejmijmy oba równania układu stronami:
$18\sqrt{6} = 6a^2b + 2b^3$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 38 = 2a^3+6ab^2 & /2 \\ 18\sqrt{6} = 2b^3+6a^2b & /2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19 = a^3+3ab^2 & /2 \\ 9\sqrt{6} = b^3+3a^2b & /2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ab^2 = 19-a^3 & (3) \\ b^3+3a^2b = 9\sqrt{6} & (4) \end{cases}$$

Z równania (3) obliczamy b:
$b^2 = \frac{19-a^3}{3a}$
Musi zachodzić: $19-a^3 > 0 \ \wedge \ 3a > 0$ (5) oraz $19-a^3 < 0 \ \wedge \ 3a < 0$ (6)

Weźmy pod uwagę przypadek (5): $a > 0 \ \wedge \ a^3 < 19 \ \Leftrightarrow \ a < \sqrt[3]{19}$
$b = \sqrt{\frac{19-a^3}{3a}}$
Podstawmy to do (4):
$\sqrt{\frac{19-a^3}{3a}}^3 + 3a^2 \cdot \sqrt{\frac{19-a^3}{3a}} = 9\sqrt{6}$
$\frac{19-a^3}{3a} \cdot \sqrt{\frac{19-a^3}{3a}} + 3a^2 \cdot \sqrt{\frac{19-a^3}{3a}} = 9\sqrt{6} \ \ / \cdot (\sqrt{3a} \cdot 3a)$
$(19-a^3) \cdot \sqrt{19-a^3} + 9a^3 \cdot \sqrt{19-a^3} = 27a\sqrt{18a} \ \ /^2$
$(19-a^3)^2 \cdot (19-a^3) + 2 \cdot (19-a^3) \cdot (19-a^3) \cdot 9a^3 + 81a^6 \cdot (19-a^3) = 3^6a^2 \cdot 18a$
$(19-a^3)^2 \cdot [(19-a^3) + 2 \cdot 9a^3] + 3^4a^6 \cdot (19-a^3) = 3^6a^2 \cdot 18a$
$(19-a^3)^2 \cdot (19-a^3+18a^3) + 19 \cdot 3^4a^6 - 3^4a^9 = 18 \cdot 3^6a^3$
$(19^2 - 2 \cdot 19 \cdot a^3 + a^6) \cdot (19+17a^3) + 19 \cdot 3^4a^6 - 3^4a^9 - 18 \cdot 3^6a^3 = 0$
$19^3 + 19^2 \cdot 17a^3 - 2 \cdot 19^2 \cdot a^3 - 2 \cdot 19 \cdot 17a^6 + 19a^6 + 17a^9 + 19 \cdot 3^4a^6 - 3^4a^9 - 18 \cdot 3^6a^3 = 0$
$(17-81)a^9 + (19 - 2 \cdot 19 \cdot 17 + 19 \cdot 81)a^6 + (19^2 \cdot 17 - 2 \cdot 19^2 - 18 \cdot 3^6)a^3 + 19^3 = 0$
$-64a^9 + 912a^6 - 7707a^3 + 6859 = 0 \ \ / \cdot (-1)$
$64a^9 - 912a^6 + 7707a^3 - 6859 = 0 \quad (7)$

Podstawmy do (7) $a = \frac{1}{64}c$ i pomnóżmy następnie przez 64^8:

$64^8 \cdot 64 \cdot \frac{c^9}{64^9} - 64^8 \cdot 912 \cdot \frac{c^6}{64^6} + 64^8 \cdot 7707\frac{c^3}{64^3} - 64^8 \cdot 6859 = 0$
$c^9 - 64^2 \cdot 912 \cdot c^6 + 64^5 \cdot 7707c^3 - 64^8 \cdot 6859 = 0 \quad (8)$
Ponieważ wszystkie współczynniki powyższego wielomianu są całkowite, więc najpierw sprawdzamy czy rozwiązaniem nie jest któryś z dzielników wyrazu wolnego $64^8 \cdot 6859$. Ze względu na bardzo duże liczby (i potęgi) trudno sprawdzić wszystkie dzielniki. Sprawdźmy więc w pierwszej kolejności liczbę, która pozwoli zniwelować liczby 64 podnoszone do wysokich potęg:
$f(64) = 64^9 - 64^2 \cdot 912 \cdot 64^6 + 64^5 \cdot 7707 \cdot 64^3 - 64^8 \cdot 6859 = 64^9 - 64^8 \cdot 912 + 64^8 \cdot 7707 - 64^8 \cdot 6859 =$
$= 64^8 \cdot (64 - 912 + 7707 - 6859) = 64^8 \cdot 0 = 0$
A więc mieliśmy szczęście. Liczba 64 jest rozwiązaniem równania (8) a co za tym idzie liczba $a = \frac{1}{64} \cdot 64 = 1$ spełnia waryunek (5) i jest rozwiązaniem równania (7).
Następnie obliczamy wartość b:
$b = \sqrt{\frac{19-1^3}{3 \cdot 1}} = \sqrt{\frac{18}{3}} = \sqrt{6}$
Mamy więc liczby a i b spełniające układ równań (1) i (2):

$$\begin{cases} 19+9\sqrt{6} = (1+\sqrt{6})^3 & (1) \\ 19-9\sqrt{6} = (1-\sqrt{6})^3 & (2) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{19+9\sqrt{6}} = 1+\sqrt{6} \\ \sqrt[3]{19-9\sqrt{6}} = 1-\sqrt{6} \end{cases}$$

A więc ostatecznie wartości u i v przyjmują postać:

$u = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{6})$
$v = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \sqrt{6})$
$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (-1 - i\sqrt{3}), \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \cdot (-1 + i\sqrt{3})$
Zatem rozwiązania równania danego w zadaniu są następujące:
$x_1 = u+v = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (1+\sqrt{6}) + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (1-\sqrt{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{6} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3 \cdot 6}}{3} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2}}{3} = -2 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{3} = -2\sqrt{2}$

$x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v = \frac{1}{2} \cdot (-1 - i\sqrt{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{6}) + \frac{1}{2} \cdot (-1 + i\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \sqrt{6}) = -(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{3}) \cdot (1 + \sqrt{6}) +$
$+(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (1-\sqrt{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{6} + i \cdot \frac{3}{6})(1+\sqrt{6}) + (-\frac{\sqrt{3}}{6} + i \cdot \frac{3}{6})(1-\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{18}}{6} + \frac{1}{2}i + i \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{18}}{6} + \frac{1}{2}i - i \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} =$
$= \frac{2 \cdot \sqrt{18}}{6} + i = \frac{\sqrt{9 \cdot 2}}{3} + i = \frac{3\sqrt{2}}{3} + i = \sqrt{2} + i$

$x_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v = \frac{1}{2} \cdot (-1 + i\sqrt{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{6}) + \frac{1}{2} \cdot (-1 - i\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \sqrt{6}) = (-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{18}}{3}) -$
$-(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{18}}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{9 \cdot 2}}{6} - i \cdot \frac{3}{6} - i \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9 \cdot 2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{9 \cdot 2}}{6} - \frac{3}{6}i + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9 \cdot 2}}{6} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{6} - 2 \cdot \frac{3}{6}i = \sqrt{2} - i$

W ten sposób znaleźliśmy rozwiązanie podane w odpowiedziach do zadań. Żeby jednak zadanie zostało w pełni rozwiązane, należałoby znaleźć pozostałe 8 pierwiastów równania (8) i pokazać, że są one liczbami zespolonymi a nie rzeczywistymi. Dalej należałoby rozpatrzyć przypadek (6) i pokazać, że on także nie ma rozwiązań reczywistych. Jednak ze względu na ilość potrzebnych obliczeń i operacji na dużych liczbach nie zamieszczę ich w tym rozwiązaniu.