9.23.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Najdogodniejsze rozwinięcie tego wyznacznika spośród ośmiu możliwych będzie według elementów drugiej kolumny (bo występują tam dwa zera i suma wszystkich elementów jest najmniejsza):

$$detA = 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 = -3 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 5 \cdot 3 - 3 \cdot 7 \cdot 0) -$$
$$-(1 \cdot 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 0) = -3 \cdot (18 - 8) - (16 - 36) = -3 \cdot 10 - (-20) = -30 + 20 = -10$$

9.24.

$$detA = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Najdogodniejsze rozwinięcie tego wyznacznika spośród ośmiu możliwych będzie według elementów trzeciej kolumny (bo występują tam dwa zera i suma wszystkich elementów jest najmniejsza):

$$detA = 0 + 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -4 \cdot (0 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 7 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 0 - 5 \cdot 7 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \cdot 4) +$$
$$+(0 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 8 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 0 - 5 \cdot 8 \cdot 1 - 0 \cdot 5 \cdot 4) = -4 \cdot (56 - 35) + 64 - 40 = -4 \cdot 21 + 24 = -84 + 24 = -60$$

9.25.

$$detA = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$$

Najdogodniejsze rozwinięcie tego wyznacznika spośród ośmiu możliwych będzie według elementów drugiego wiersza (bo występują tam dwa zera i suma wszystkich elementów jest najmniejsza):

$$detA = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} + x \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & y & 0 \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} + 0 + 0 = -1 \cdot (ayz + b \cdot 0 \cdot 0 + c \cdot 0 \cdot 0 - c \cdot y \cdot 0 - b \cdot 0 \cdot z - a \cdot 0 \cdot 0) +$$
$$+x \cdot (0 \cdot y \cdot z + b \cdot 0 \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot 0 + c \cdot y \cdot 1 - b \cdot 1 \cdot z - 0 \cdot 0 \cdot 0) = -ayz - cxy - bxz$$

9.26.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Najdogodniejsze rozwinięcie tego wyznacznika spośród dwunastu możliwych będzie według elementów szóstej kolumny (bo występują tam cztery zera i suma wszystkich elementów jest najmniejsza):

$$detA = 3 \cdot (-1)^{1+6} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0$$

Najdogodniejszymi rozwinięciami obu powyższych wyznaczników spośród dziesięciu możliwych będzie według piątej kolumny obu z nich:

$$detA = -3 \cdot [4 \cdot (-1)^{1+5} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0] + 2 \cdot [5 \cdot (-1)^{1+5} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}]$$

Najdogodniejszym rozwinięciem obu powyższych wyznaczników (są takie same) spośród ośmiu możliwych będzie według elementów trzeciego wiersza:

$$detA = -3\cdot 4\cdot [4\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}] + 2\cdot 5\cdot[4\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}] =$$

$$= -12\cdot[4\cdot(9\cdot 5\cdot 0 + 7\cdot 4\cdot 5 + 6\cdot 3\cdot 0 - 6\cdot 5\cdot 5 - 7\cdot 3\cdot 0 - 9\cdot 4\cdot 0) - 3\cdot(8\cdot 5\cdot 0 + 7\cdot 4\cdot 6 + 6\cdot 2\cdot 0 - 6\cdot 5\cdot 6-$$
$$-7\cdot 2\cdot 0 - 8\cdot 4\cdot 0)] + 10\cdot[4\cdot(9\cdot 5\cdot 0 + 7\cdot 4\cdot 5 + 6\cdot 3\cdot 0 - 6\cdot 5\cdot 5 - 7\cdot 3\cdot 0 - 9\cdot 4\cdot 0) - 3\cdot(8\cdot 5\cdot 0 + 7\cdot 4\cdot 6+$$
$$+6\cdot 2\cdot 0 - 6\cdot 5\cdot 6 - 7\cdot 2\cdot 0 - 8\cdot 4\cdot 0)] = (-12+10)\cdot[4\cdot(0+140+0-150-0-0) - 3\cdot(0+168+0-180-0-0) =$$
$$-2\cdot[4\cdot(-10) - 3\cdot(-12)] = -2\cdot(-40+36) = -2\cdot(-4) = 8$$

9.27.

$$detA = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Najdogodniejsze rozwinięcie tego wyznacznika spośród dwunastu możliwych będzie według elementów szóstej kolumny (bo występują tam cztery zera i suma wszystkich elementów jest najmniejsza):

$$detA = 2\cdot(-1)^{1+6}\cdot\begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 & 9 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+6}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0$$

Najdogodniejszymi rozwinięciami obu powyższych wyznaczników spośród dziesięciu możliwych będzie według elementów piątej kolumny (w obu przypadkach):

$$detA = -2\cdot[3\cdot(-1)^{1+5}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0] + 3\cdot[4\cdot(-1)^{1+5}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0] =$$

$$= -6\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} + 12\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Najdogodniejsze rozwinięcie powyższego wyznacznika spośród ośmiu możliwych będzie według elementów drugiej kolumny (bo występują tam dwa zera oraz suma elementów jest najmniejsza):

$$detA = 6\cdot[4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 9 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} + 0 + 0] = -24\cdot(5\cdot 5\cdot 8 + 6\cdot 6\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 6 - 1\cdot 5\cdot 0 - 6\cdot 0\cdot 8 - 5\cdot 6\cdot 6)+$$
$$+18\cdot(7\cdot 5\cdot 8 + 9\cdot 6\cdot 0 + 7\cdot 0\cdot 6 - 7\cdot 5\cdot 0 - 9\cdot 0\cdot 8 - 7\cdot 6\cdot 6) = -24\cdot(200-180) + 18\cdot(280-252) = -24\cdot 20 + 18\cdot 28 =$$
$$= -480 + 504 = 24$$

9.28.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Najdogodniejsze rozwinięcie tego wyznacznika spośród dwunastu możliwych będzie według elementów piątego wiersza (bo występują tam cztery zera i suma wszystkich elementów jest najmniejsza):

$$detA = 1\cdot(-1)^{5+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{5+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0$$

Najdogodniejszymi rozwinięciami obu powyższych wyznaczników spośród dziesięciu możliwych będzie według elementów piątego wiersza (w obu przypadkach):

$$detA = 1 \cdot [7 \cdot (-1)^{5+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0] + 1 \cdot [3 \cdot (-1)^{5+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0] =$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Najdogodniejsze rozwinięcie powyższego wyznacznika spośród ośmiu możliwych będzie według elementów pierwszego wiersza (bo występują tam dwa zera oraz suma elementów jest najmniejsza):

$$detA = 10 \cdot [0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}] = 10 \cdot [(0 \cdot (-1) \cdot 9 + 0 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \cdot 7 - 7 \cdot (-1) \cdot 3 -$$

$$-0 \cdot 1 \cdot 9 - 0 \cdot 4 \cdot 7) + (0 \cdot (-1) \cdot 6 + 0 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 7 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 6 - 0 \cdot 2 \cdot 7)] = 10 \cdot (49 + 21 + 21 + 9) = 10 \cdot (70 + 30) =$$

$$= 10 \cdot 100 = 1000$$

9.29.

$$detA = \begin{vmatrix} a-b & m-n & r-s \\ b-c & n-p & s-t \\ c-a & p-m & t-r \end{vmatrix} = 0$$

Dodajmy drugi wiersz do pierwszego:

$$detA = \begin{vmatrix} a-c & m-p & r-t \\ b-c & n-p & s-t \\ c-a & p-m & t-r \end{vmatrix}$$

Pomnóżmy pierwszy wiersz przez liczbę -1:

$$-1 \cdot detA = \begin{vmatrix} c-a & p-m & t-r \\ b-c & n-p & s-t \\ c-a & p-m & t-r \end{vmatrix}$$

Powyższy wyznacznik ma pierwszy i trzeci wiersz identyczny, więc zgodnie z własnościami wyznaczników jest on równy 0. Zatem:

$-1 \cdot detA = 0 \quad \Leftrightarrow \quad detA = 0, \quad$ c.n.d

9.30.

$$detA = \begin{vmatrix} a & b+c & m \\ b & c+a & m \\ c & a+b & m \end{vmatrix} = 0$$

Dodajmy pierwszą kolumnę do drugiej:

$$detA = \begin{vmatrix} a & a+b+c & m \\ b & a+b+c & m \\ c & a+b+c & m \end{vmatrix}$$

Odejmijmy trzeci wiersz od pierwszego i drugiego:

$$detA = \begin{vmatrix} a-c & 0 & 0 \\ b-c & 0 & 0 \\ c & a+b+c & m \end{vmatrix}$$

Ponieważ w powyższym wyznaczniku $3x3$ mamy podwyznacznik $2x2$ złożony z samych zer, więc każdy iloczyn wyznacznika $3x3$ będzie równy 0. A co za tym idzie $detA = 0$, c.n.d.

9.31.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Mnożymy piąty wiersz przez 2 i odejmujemy od wiersza czwartego:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Rozwińmy teraz ten wyznacznik według elementów wiersza czwartego:

$$detA = 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & 5 & -1 \\ -1 & -5 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 + (-2) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

Oznaczmy pierwszy z dwóch powyższych wyznaczników przez $detB$ a drugi przez $detC$ i obliczmy je:

$$detB = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & 5 & -1 \\ -1 & -5 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Dodajmy trzeci wiersz do pierwszego:

$$detB = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 5 & -1 \\ -1 & -5 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

i rozwińmy ten wyznacznik według elementów wiersza pierwszego:

$$detB = 0 + (-3) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 3 \cdot [(-2) \cdot (-3) \cdot (-2) + 5 \cdot (-2) \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) \cdot (-3) -$$
$$-5 \cdot (-1) \cdot (-2) - (-2) \cdot (-2) \cdot 1] = 3 \cdot (-12 + 30 + 1 + 9 - 10 - 4) = 3 \cdot 14 = 42$$

Teraz obliczmy wyznacznik $detC$:

$$detC = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Dodajmy trzeci wiersz do pierwszego:

$$detC = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

i rozwińmy ten wyznacznik według elementów wiersza pierwszego:

$$detC = 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot [(-2) \cdot (-3) \cdot (-2) + 5 \cdot (-2) \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) \cdot (-3) - 5 \cdot (-1) \cdot (-2) -$$
$$-(-2) \cdot (-2) \cdot 1] = 5 \cdot (-12 + 30 + 1 + 9 - 10 - 4) = 5 \cdot 14 = 70$$

Zatem:

$detA = -1 \cdot detB + 2 \cdot detC = -1 \cdot 42 + 2 \cdot 70 = 140 - 42 = 98$

9.32.

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ Dodajmy czwarty wiersz do pierwszego: $$detA = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Odejmijmy drugi wiersz ostatniego wyznacznika od wiersza piątego: $$detA = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dodajmy trzecią kolumnę ostatniego wyznacznika do kolumny pierwszej: $detA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Rozwińmy teraz ostatni wyznacznik według elementów pierwszego wiersza:

$detA = 0 + 0 + -2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & -9 & 7 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0$ Pomnóżmy czwartą kolumnę wyznacznika w środku przez liczbę 2 i odejmijmy od kolumny drugiej:

$detA = -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Rozwińmy ten wyznacznik według elementów czwartego wiersza:

$detA = -2 \cdot [2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot [-2 \cdot (-2 + 1)] =$

$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 = 2 \cdot [0 \cdot 7 \cdot (-2) + 2 \cdot (-5) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 7 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) - 0 \cdot (-5) \cdot 1] = 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$

9.33.

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$

Odejmijmy pierwszą kolumnę od drugiej: $detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$ a następnie pierwszą kolumnę od trzeciej:

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$. Najdogodniejszym rozwinięciem tego wyznacznika spośród dziesięciu możliwych będzie według pierwszego wiersza: $detA = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$. Odejmijmy pierwszą

kolumnę pomnożoną przez liczbę 2 od drugiej kolumny: $detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 - 2x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 - 2x_1^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$. Najdogodniejszym rozwinięciem tego wyznacznika spośród ośmiu możliwych będzie według elementów pierwszego wiersza:

$detA = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ x_2 - 2x_1 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 - 2x_1^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} = -1 \cdot x_3 \cdot x_4^2 + 1 \cdot x_4 \cdot (x_2^2 - 2x_1^2) + 1 \cdot (x_2 - 2x_1) \cdot x_3^2 - 1 \cdot x_3 \cdot (x_2^2 - 2x_1^2) -$

$-1 \cdot (x_2 - 2x_1) \cdot x_4^2 - (-1) \cdot x_4 \cdot x_3^2 = -x_3x_4^2 + x_4x_2^2 - x_4 \cdot 2x_1^2 + x_2x_3^2 - 2x_1x_3^2 - x_3x_2^2 + x_3 \cdot 2x_1^2 - x_2x_4^2 + 2x_1x_4^2 + x_4x_3^2 =$

$= x_3x_4(x_3 - x_4) + x_2x_4(x_2 - x_4) + 2x_1x_4(x_4 - x_1) + x_2x_3(x_3 - x_2) + 2x_1x_3(x_1 - x_3)$

9.34.

$$detA = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ a_{2n,2} & a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{2n,1} \cdot (-1)^{2n+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \cdot [a_{2,2} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{2n-1,2} \cdot (-1)^{2n-2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{2n,2} \cdot (-1)^{2n-1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

$$]-a_{2n,1} \cdot [a_{1,2} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+a_{2,2} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,3} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+a_{2n-1,2} \cdot (-1)^{2n-1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,3} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \backslash$$

$$] = [a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{1,1}\cdot a_{2n-1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0\\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0\\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0\\ a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n}\end{vmatrix}+$$

$$+a_{1,1}\cdot a_{2n,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0\\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0\\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0\\ a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n}\end{vmatrix}$$

$$]-[a_{2n,1}\cdot a_{1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0\\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0\\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0\\ a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0\end{vmatrix}-$$

$$-a_{2n,1}\cdot a_{2,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{1,3} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n}\\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0\\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0\\ a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0\end{vmatrix}+$$

$$+a_{2n,1}\cdot a_{2n-1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{1,3} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n}\\ a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0\\ a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0\\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0\end{vmatrix}$$

]
I należy rozwijać w powyższy sposób kolejne wyznaczniki aż do zaobserwowania prawidłowości. Na powyższym kroku skończę rozumowanie, bo jeszcze tej prawidłowości nie widzę a zapis macierzowy jest bardzo niewygodny/rozwlekły i utrudnia zauważenie rozwiązania.