9.35.
$2x-3y=3, \quad x+2y=5$
$W=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-(-3)\cdot 1=4+3=7$
$W_x=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-(-3)\cdot 5=6+15=21$
$W_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 1=10-3=7$
Ponieważ $W\neq 0$, więc układ jest oznaczony czyli ma dokładnie jedno rozwiązanie, które wyliczamy z wzorów:
$x=\frac{W_x}{W}=\frac{21}{7}=3$

$y=\frac{W_y}{W}=\frac{7}{7}=1$

Spr.
$L=2x-3y=2\cdot 3-3\cdot 1=6-3=3=P$
$L=x+2y=3+2\cdot 1=3+2=5=P$

Odp. Rozwiązaniem układu równań danego w zadaniu jest $x=3$ i $y=1$.

9.36.
$6x-4y=5, \quad 9x-6y=2$
$W=\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}=6\cdot(-6)-(-4)\cdot 9=-36+36=0$
$W_x=\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=5\cdot(-6)-(-4)\cdot 2=-30+8=-22$
$W_y=\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}=6\cdot 2-5\cdot 9=12-45=-33$
Ponieważ $W=0 \ \wedge \ W_x\neq 0 \ \wedge \ W_y\neq 0$, czyli W_x i W_y nie są jednocześnie równe 0, więc układ równań dany w zadaniu jest sprzeczny.

9.37.
$3x+5y=5, \quad x-2y=9$
$W=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\cdot(-2)-5\cdot 1=-6-5=-11$
$W_x=\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 9 & -2 \end{vmatrix}=5\cdot(-2)-5\cdot 9=-10-45=-55$
$W_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=3\cdot 9-5\cdot 1=27-5=22$
Ponieważ $W\neq 0$, więc układ równań jest oznaczony czyli posiada dokładnie jedno rozwiązanie, które wyliczamy ze wzorów:
$x=\frac{W_x}{W}=\frac{-55}{-11}=5$

$y=\frac{W_y}{W}=\frac{22}{-11}=-2$

Spr.
$L=3x+5y=3\cdot 5+5\cdot(-2)=15-10=5=P$
$L=x-2y=5-2\cdot(-2)=5+4=9=P$

Odp. Rozwiązaniem układu równań danego w zadaniu jest $x=5$ i $y=-2$.

9.38.
$2x-4y=10, \quad 5x-10y=25$
$W=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}=2\cdot(-10)-(-4)\cdot 5=-20+20=0$

$W_x = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 25 & -10 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-10) - (-4) \cdot 25 = -100 + 100 = 0$

$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = 2 \cdot 25 - 10 \cdot 5 = 50 - 50 = 0$

Ponieważ $W = W_x = W_y = 0$, więc układ równań może być nieoznaczony lub sprzeczny. Pomnóżmy pierwsze równanie przez $2,5$:

$2,5 \cdot 2x - 2,5 \cdot 4y = 2,5 \cdot 10$

$5x - 10y = 25$

Po odjęciu stronami powyższego równania od drugiego równania układu otrzymujemy:

$0 = 0$, czyli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających równanie:

$2x = 4y + 10$

$x = 2y + 5$

Odp. Układ równań dany w zadaniu jest nieoznaczony czyli posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Każada para liczb $y \in R$ i $x = 2y + 5$ spełnia ten układ.

9.39.

$(k-2)x + (2-k)y = 3k - 6$

$(2k^2 - 8)x - (3k - 6)y = 10 - 5k$

$$\begin{cases} (k-2)x + (2-k)y = 3(k-2) \\ 2(k^2-4)x - 3(k-2)y = -5(k-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k-2)x - (k-2)y = 3(k-2) \\ 2(k-2)(k+2)x - 3(k-2)y = -5(k-2) \end{cases}$$

Dla $k = 2$ nasz układ przyjmuje postać:

$$\begin{cases} 0 - 0 = 0 \\ 0 - 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Zatem jest on nieoznaczony czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań. Każda para (x, y) gdzie $x \in R$, $y \in R$ spełnia ten układ równań.

Dla $k \neq 2$ możemy oba równania naszego układu podzielić stronami przez $k - 2$ i otrzymamy:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2(k+2)x - 3y = -5 \end{cases}$$

$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2(k+2) & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2(k+2) = -3 + 2k + 4 = 2k + 1$

$W_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-5) = -9 - 5 = -14$

$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2(k+2) & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 2(k+2) = -5 - 6k - 12 = -6k - 17$

Dla $W \neq 0$ układ ma jedno rozwiązanie:

$W = 2k + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2k \neq -1 \quad \Leftrightarrow \quad k \neq -\frac{1}{2}$

Dla $k = -\frac{1}{2}$ mamy $W = 0$, $W_x = -14 \neq 0$, $W_y = -6 \cdot (-\frac{1}{2}) - 17 = 3 - 17 = -14 \neq 0$. Ponieważ $W = 0$ i W_x oraz W_y nie są jednocześnie równe zeru, więc układ równań jest sprzeczny.

Odp. Dla $k = 2$ układ dany w zadaniu jest nieozanczony, dla $k \neq -\frac{1}{2}$ układ jest oznaczony a dla $k = -\frac{1}{2}$ jest sprzeczny.

9.40.

$$\begin{cases} kx + 4y = 2k \\ 9x + ky = 18 \end{cases}$$

$W = \begin{vmatrix} k & 4 \\ 9 & k \end{vmatrix} = k \cdot k - 4 \cdot 6 = k^2 - 36$

$W_x = \begin{vmatrix} 2k & 4 \\ 18 & k \end{vmatrix} = 2k \cdot k - 4 \cdot 18 = 2k^2 - 72$

$W_y = \begin{vmatrix} k & 2k \\ 9 & 18 \end{vmatrix} = k \cdot 18 - 2k \cdot 9 = 18k - 18k = 0$

Dla $W \neq 0$ układ ma jedno rozwiązanie:
$k^2 - 36 \neq 0$
$k^2 \neq 36$
$k \neq 6 \quad \wedge \quad k \neq -6$

Zbadajmy układ dla $k = 6$:
$W_x = 2 \cdot 6^2 - 72 = 2 \cdot 36 - 72 = 72 - 72 = 0$, czyli układ może być sprzeczny lub nieoznaczony (bo $W = 0 \wedge\ W_x = 0\ \wedge\ W_y = 0$).
Nasz układ przyjmuje postać:

$\begin{cases} 6x + 4y = 2 \cdot 6 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

Odejmując równania ostatniego układu stronami dostajemy równanie $0 = 0$, a zatem układ ma nieskończenie wiele rozwiązań:
$2y = 6 - 3x$
$y = 3 - \frac{3}{2}x, \quad$ dla $x \in R$

Zbadajmy układ dla $k = -6$:
$W_x = 2 \cdot (-6)^2 - 72 = 2 \cdot 36 - 72 = 72 - 72 = 0$, czyli układ może być sprzeczny lub nieoznaczony (bo $W = 0\ \wedge\ W_x = 0\ \wedge\ W_y = 0$).
Nasz układ przyjmuje postać:

$\begin{cases} -6x + 4y = 2 \cdot (-6) \\ 9x - 6y = 18 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x + 2y = -6 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x + 2y = -6 \\ -3x + 2y = -6 \end{cases}$

Odejmując równania ostatniego układu stronami dostajemy równanie $0 = 0$, a zatem układ ma nieskończenie wiele rozwiązań:
$2y = -6 + 3x$
$y = \frac{3}{2}x - 3, \quad$ dla $x \in R$

9.41.

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 2x + 3y + z = 11 \end{cases}$

$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 8 + 27 - 3 \cdot 6 = 36 - 18 = 18$

$W_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 11 & 1 & 2 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 14 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 11 + 3 \cdot 11 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 11 - 2 \cdot 11 \cdot 1 - 14 \cdot 2 \cdot 3 = 14 + 44 + 99 - 33 - 22 - 84 =$
$= 15 + 11 - 8 = 18$

$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 3 & 11 & 2 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 \cdot 1 + 14 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 11 - 3 \cdot 11 \cdot 2 - 14 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 11 = 11 + 56 + 99 - 66 - 42 - 22 =$
$= 33 + 14 - 11 = 36$

$W_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 11 + 2 \cdot 11 \cdot 2 + 14 \cdot 3 \cdot 3 - 14 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 11 - 1 \cdot 11 \cdot 3 = -4 \cdot 11 + 7 \cdot 14 = 98 - 44 = 54$

$x = \frac{W_x}{W} = \frac{18}{18} = 1, \quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{36}{18} = 2, \quad z = \frac{W_z}{W} = \frac{54}{18} = 3$

Spr:
$L = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14 = P$
$L = 3 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 11 = P$
$L = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 = 11 = P$

Odp. Rozwiązaniem układu równań danego w zadaniu są liczby $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

9.42.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ x - 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) =$$
$$= -2 + 2 - 9 - 1 - 3 - 12 = -25$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \cdot (-3) =$$
$$= -1 + 4 - 2 - 6 = -5$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \cdot 2 = -2 + 6 + 3 + 8 = 15$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot (-3) = 4 - 9 - 1 + 6 = 0$$

$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-5}{-25} = \frac{1}{5}$, $\quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{15}{-25} = -\frac{3}{5}$, $\quad z = \frac{W_z}{W} = \frac{0}{-25} = 0$

Spr:
$L = 2 \cdot \frac{1}{5} - (-\frac{3}{5}) + 0 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 = P$
$L = 3 \cdot \frac{1}{5} + (-\frac{3}{5}) - 0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0 = P$
$L = \frac{1}{5} - 3 \cdot (-\frac{3}{5}) - 0 = \frac{1}{5} + \frac{9}{5} = \frac{10}{5} = 2 = P$

Odp. Rozwiązaniem układu równań danego w zadaniu są liczby $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$, $z = 0$.

9.43.

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 21 \\ 5x - 2y - 3z = -12 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 \cdot (-3) - 5 \cdot (-3) \cdot (-2) =$$
$$= -75 + 45 - 16 - 50 - 36 - 30 = -162$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 21 & 5 & -3 \\ -12 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-3) \cdot (-12) + 2 \cdot 21 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 \cdot (-12) - (-3) \cdot 21 \cdot (-3) - 3 \cdot (-3) \cdot (-2) =$$
$$= -45 - 108 - 84 + 120 - 189 - 18 = -324$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 21 & -3 \\ 5 & -12 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 21 \cdot (-3) + 3 \cdot (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-12) - 2 \cdot 21 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot (-3) - 5 \cdot (-3) \cdot (-12) =$$
$$= -315 - 45 - 96 - 210 + 36 - 180 = -810$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 21 \\ 5 & -2 & -12 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot (-12) + (-3) \cdot 21 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 \cdot (-12) - 5 \cdot 21 \cdot (-2) =$$
$$= -300 - 315 - 24 - 75 - 144 + 210 = -648$$

$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-324}{-162} = 2$, $\quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{-810}{-162} = 5$, $\quad z = \frac{W_z}{W} = \frac{-648}{-162} = 4$

Spr:

$L = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 10 - 15 + 8 = 3 = P$
$L = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 8 + 25 - 12 = 21 = P$
$L = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 10 - 12 = -12 = P$

Odp. Rozwiązaniem układu równań danego w zadaniu są liczby $x = 2$, $y = 5$, $z = 4$.

9.44.

$$\begin{cases} 3x + 12y + 5z + 43 = 0 \\ 5x - 3y - 10z + 76 = 0 \\ 4x - 17y + 2z - 23 = 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 3x + 12y + 5z = -43 \\ 5x - 3y - 10z = -76 \\ 4x - 17y + 2z = 23 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 5 \\ 5 & -3 & -10 \\ 4 & -17 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot 2 + 12 \cdot (-10) \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot (-17) - 5 \cdot (-3) \cdot 4 - 12 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-10) \cdot (-17) =$$
$$= -18 - 480 - 425 + 60 - 120 - 510 = -1493$$

$$W_x = \begin{vmatrix} -43 & 12 & 5 \\ -76 & -3 & -10 \\ 23 & -17 & 2 \end{vmatrix} = -43 \cdot (-3) \cdot 2 + 12 \cdot (-10) \cdot 23 + 5 \cdot (-76) \cdot (-17) - 5 \cdot (-3) \cdot 23 - 12 \cdot (-76) \cdot 2 - (-43) \cdot (-10) \cdot (-17) =$$
$$= 258 - 2760 + 6460 + 345 + 1824 + 7310 = 13437$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 3 & -43 & 5 \\ 5 & -76 & -10 \\ 4 & 23 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-76) \cdot 2 + (-43) \cdot (-10) \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 23 - 5 \cdot (-76) \cdot 4 - (-43) \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-10) \cdot 23 =$$
$$= -456 + 1720 + 575 + 1520 + 430 + 690 = 4479$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 3 & 12 & -43 \\ 5 & -3 & -76 \\ 4 & -17 & 23 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot 23 + 12 \cdot (-76) \cdot 4 + (-43) \cdot 5 \cdot (-17) - (-43) \cdot (-3) \cdot 4 - 12 \cdot 5 \cdot 23 - 3 \cdot (-76) \cdot (-17) =$$
$$= -207 - 3648 + 3655 - 516 - 1380 - 3876 = -5972$$

$x = \frac{W_x}{W} = \frac{13437}{-1493} = -9, \quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{4479}{-1493} = -3, \quad z = \frac{W_z}{W} = \frac{-5972}{-1493} = 4$

Spr:
$L = 3 \cdot (-9) + 12 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 + 43 = -27 - 36 + 20 + 43 = 0 = P$
$L = 5 \cdot (-9) - 3 \cdot (-3) - 10 \cdot 4 + 76 = -45 + 9 - 40 + 76 = 0 = P$
$L = 4 \cdot (-9) - 17 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 - 23 = -36 + 51 + 8 - 23 = 0 = P$

Odp. Rozwiązaniem układu równań danego w zadaniu są liczby $x = -9$, $y = -3$, $z = 4$.